第二章　线性算子

10　复数域上的 Jordan 标准型（存在性）

记号: 在本节中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间.

引理 10.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$. 此时, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的 (上一讲定理 9.11, 即循环空间判别法). 由不可分子空间判别法(上一讲引理 9.13) 可知, V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 反之, 设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 同样的引理蕴含 $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{C}[t]$ 中某个首一的不可约多项式的幂次. 由代数学基本定理, $\mu_{\mathcal{A}}=(t-\lambda)^m$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$

且 $m \in \mathbb{Z}^+$. 该引理还蕴含 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是 $m{=}n$ (第二章第四讲定理 9.11).

设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的, $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 且 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$.

断言. 令 $\epsilon_j = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, 是 V 的一组基.

断言的证明. 只要证明 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 线性无关即可.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha_1\epsilon_1 + \cdots + \alpha_n\epsilon_n = \mathbf{0}$. 则

$$\alpha_1(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v}) + \cdots + \alpha_{n-1}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{v}) + \alpha_n\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

令 $f(t) = \alpha_1(t-\lambda)^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}(t-\lambda) + \alpha_n$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}){=}\mathbf{0}$. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $g(t) \in \mathbb{C}[t]$ 使得 $\mathbf{x} = g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v}){=}g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 因为 $\deg(f) < n$, 所以 $f(t) = 0$. 通过分析 f 的次数, 我们得到

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

断言成立.

下面我们计算 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵. 设 $j = 2, \ldots, n$. 则

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\epsilon_j) &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})(\epsilon_j) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})) + \lambda\mathcal{E}(\epsilon_j) \\
&= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j+1}(\mathbf{v}) + \lambda\epsilon_j = \epsilon_{j-1} + \lambda\epsilon_j.
\end{aligned}$$

而

$$\mathcal{A}(\epsilon_1) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})(\epsilon_1) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v})) + \lambda\mathcal{E}(\epsilon_1)$$
$$= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^n(\mathbf{v}) + \lambda\epsilon_1 = \lambda\epsilon_1.$$

于是

$$\mathcal{A}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad \square.$$

我们称 (1) 中的矩阵为关于 λ 的 n 阶 *Jordan* 块.

Jordan 块的若干基本性质如下.

注解 10.2

(i) 如果 $\lambda \neq 0$, 则 $\mathrm{rank}(J_n(\lambda)) = n$. 而 $\mathrm{rank}(J_n(0)) = n-1$;

(ii) $J_n(\lambda) = \lambda E_n + J_n(0)$;

(iii) $J_n(\lambda)$ 的极小和特征多项式都等于 $(t-\lambda)^n$; 从而把 $J_n(\lambda)$ 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的算子后, $\mathbb{C}^n$ 是 $J_n(\lambda)$-循环的;

(iv) $J_n(\lambda)$ 的唯一的特征值是 λ, 而对应的特征子空间的维数等于 1, 这是因为

$$J_n(\lambda) - \lambda E_n = J_n(0),$$

其秩等于 $n-1$.

(v) $J_n(\lambda)$ 可对角化当且仅当 $n=1$.

定理 10.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $d_1,\ldots,d_k\in\mathbb{Z}^+$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}$, 都不必两两不同.

证明. 由循环子空间分解（上一讲定理 9.3）可知

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k,$$

其中 W_i 是 d_i-维 $\mathcal{A}$-不可分子空间, $i=1,2,\ldots,k$. 由上一讲引理 9.13 和代数学基本定理, $\mathcal{A}_{W_i}$ 的极小多项式是 $(t-\lambda_i)^{d_i}$. 根据引理 10.1, $\mathcal{A}_{W_i}$ 在 W_i 的某组基下的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$. 再由第二章第三讲定理 5.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 10.4 设 $\mathcal{D}: \mathbb{C}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是导数算子. 计算 $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型.

解.由上一讲例 *9.15*, $\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型是 $J_n(0)$. 注意到

$$\mathbb{C}[x]^{(n)} = \mathbb{C}[\mathcal{D}] \cdot x^{n-1}.$$

由引理 *10.1* 可知 $\mathcal{D}$ 在基底

$$\mathcal{D}^{n-j}(x^{n-1}) = \frac{(n-1)!}{j!} x^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

下的矩阵是 $J_n(0)$. □

推论 10.5 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 则 A 相似于

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

其中 $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, 都不必两两不同.

例 10.6 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

- $n = 1$. $(a) = J_1(a)$.
- $n = 2$. 设 $\chi_A = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$. 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则根据第二章第四讲推论 *8.8*,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1=\lambda_2=:\lambda$. 如果 $\mu_A=t-\lambda$, 则根据可对角化判别法(V)可知,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda)&0\\0&J_1(\lambda)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda)^2$, 则 A 对应循环算子(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^2 是 A-不可分的. 于是

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}=J_2(\lambda).$$

- $n=3$. 设 $\chi_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$. 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同, 则根据第二章第四讲推论 8.8,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&0&0\\0&J_1(\lambda_2)&0\\0&0&J_1(\lambda_3)\end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$. 如果 $\mu_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, 则根据可对角化判别法 V,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&0&0\\0&J_1(\lambda_2)&0\\0&0&J_1(\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)^2$, 则 A 对应循环算子(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A-不可分的. 故

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&1\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&O_{1\times 2}\\O_{2\times 1}&J_2(\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=:\lambda$. 如果 $\mu_A=t-\lambda$, 则根据可对角化判别法(V),

$$A\sim_s\lambda E_3=\begin{pmatrix}J_1(\lambda)&0&0\\0&J_1(\lambda)&0\\0&0&J_1(\lambda)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda)^2$, 则 A 对应算子不是循环的(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A-不可分的. 故

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1(\lambda)&O\\O&J_2(\lambda)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda)^3$, 则 A 对应算子是循环的(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^3

是 A-不可分的,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_3(\lambda).$$

例 10.7 设

$$J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & J_2(0) \end{pmatrix}.$$

则 $\mu_A = \mu_B = t^2$ 且 $\chi_A = \chi_B = t^4$. 通过极小多项式和特征多项式, 我们仍无法在相似的意义下区分 A 和 B. 注意到 $\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}(B)$. 于是, $A \nsim_s B$.

$J_{\mathcal{A}}$ 中的矩阵称为 $\mathcal{A}$ 的一个 *Jordan* 标准型. $J_{\mathcal{A}}$ 的基本性质如下:

注解 10.8 *(i)* $\mathrm{rank}(J_A) = \sum_{i=1}^k \mathrm{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$;

(ii) J_A 的(也是 A 的)极小多项式等于

$$\mathrm{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1}, \ldots, (t-\lambda_k)^{d_k});$$

特征多项式等于

$$(t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k};$$

(iii) 设 $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$. 则 J_A 中至少有一个关于 λ 的 *Jordan* 块.

(iv) λ 的代数重数等于 λ 在 J_A 主对角线上出现的次数; λ 的几何重数等于关于 λ 的 *Jordan* 块在 J_A 中出现的次数;

(v) λ 在极小多项式中的重数等于 J_A 中关于 λ 的 *Jordan* 块出现的最大阶数.

(vi) A 可对角化当且仅当 $d_1 = \cdots = d_k = 1$.

性质 (i) 来自 J_A 是分块对角矩阵.

性质 (ii) 成立是因为第二章第三讲定理 5.9 和第二章第三讲例 7.14.

性质 (iii) 成立是因为 $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

性质 (iv) 中的第一部分可由 (i) 中特征多项式的形式直接得出. 下面来验证性质 (iv) 的第二部分. 注意到

$$J_A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) - \lambda E_{d_1} & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) - \lambda E_{d_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) - \lambda E_{d_k} \end{pmatrix}.$$

因为

$$\operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i) - \lambda E_{d_i}) = \begin{cases} d_i, & \lambda \neq \lambda_i, \\ d_i - 1, & \lambda = \lambda_i, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. 于是,

$$\operatorname{rank}(J_A - \lambda E_n) = n - (J_A \text{ 中关于 } \lambda \text{ 的 Jordan 块出现的次数}).$$

由此和矩阵的秩和解空间维数的关系得出 $\dim(V^\lambda)$ 等于 J_A 中关于 λ 的 Jordan 块出现的次数. 于是, (iv) 成立.

性质 (v) 来自于 (i) 中极小多项式的形式.

最后, 我们来验证性质 (vi). 如果 $d_1 = \cdots = d_k = 1$, 则 J_A 可对角化. 于是, A 可对角化. 反之, A 可对角化蕴含 μ_A 中每个因子的重数都等于 1 (对角化判别法 V). 由性质 (v), J_A 是对角阵.

例 10.9 设 $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A = (t - \alpha)^3$. 于是, α 是 A 唯一的特征根, 其代数重数等于 *3*.

$$\operatorname{rank}(A - \alpha E) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此看出, 当 $\alpha \neq 0$ 时, $\operatorname{rank}(A-\alpha E)=1$. 故 α 的几何重数等于 *2*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(\alpha) & O \\ O & J_1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

当 $\alpha = 0$ 时, $\operatorname{rank}(A-\alpha E)=0$. 故 α 的几何重数等于 *3*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(0) \end{pmatrix} = O_{3\times 3}. \quad \square$$

例 10.10 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A = (t-2)(t-1)^2$. 于是, 2 的代数和几何重数都等于 *1*. 故 $J_1(2)$ 在 J_A 中出现一次. 注意到 1 的几何重数等于

$$3 - \operatorname{rank}(A-E) = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

故 $J_2(1)$ 在 J_A 中出现一次. 由此得出

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(2) & O \\ O & J_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 10.11 设 $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $S^2 - nS = O$. 求 J_S.

解. 设 $f(t) = t(t-n)$. 则 $f(A) = O$.

情形 1: $\mu_S = t$. $S = O = J_S$.

情形 2: $\mu_S = t - n$. $S = nE_n = J_S$.

情形 3: $\mu_S = t(t-n)$. 因为 $n \neq 0$, 所以 S 可对角化(*判别法V*). 于是

$$J_S = \begin{pmatrix} nE_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \mathrm{rank}(S)$.

例 10.12 设 $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$, $\mathrm{rank}(A) = 3$, $\mathrm{rank}(A^2) = 2$, $\mathrm{rank}(A+E) = 4$ 和 $\mathrm{rank}((A+E)^2) = 3$. 求 J_A.

解. 因为 $\mathrm{rank}(A) = 3 < 5$, 所以 0 是 A 的特征根且几何重数为 2. 故 J_A 中有两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块. 因为 $\mathrm{rank}(A+E) = 4 < 5$, 所以 -1 是 A 的特征根且几何重数为 1. 故 J_A 中有一个以 -1 为特征根的 *Jordan* 块.

下面我们来分析 J_A 中 *Jordan* 块的阶数.

(i) 设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_1(0)$. 则

$$J_A = \begin{pmatrix} O_{2\times 2} & \\ & B \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中 $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ 和 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 则

$$\mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}(J_A^2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} O_{2\times 2} & \\ & B^2 \end{pmatrix} = 3 \neq 2,$$

矛盾.

(ii) 设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_2(0)$. 则

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(0) & \\ & & C \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中 $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 和 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 直接计算得

$$\mathrm{rank}(A^2) = 2.$$

如果 $C = J_2(-1)$, 则

$$J_A + E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}.$$

我们有 $\operatorname{rank}(J_A+E)$=4 和 $\operatorname{rank}((J_A+E)^2)$=3. 因为

$J_A+E = P^{-1}(A+E)P \Longrightarrow \operatorname{rank}((A+E)^2) = \operatorname{rank}(J_A^2)$,

所以 $\operatorname{rank}((A+E)^2) = 3$. 符合题目要求.

如果 $C = \operatorname{diag}(-1, \lambda)$, 则 $\lambda \notin \{0, -1\}$. 这是因为 J_A 中只有一个以 -1 为特征值的 *Jordan* 块. 于是,

$$J_A + E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & J_2(1) & & \\ & & 0 & \\ & & & 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}((J_A+E)^2) = 4 \Rightarrow \operatorname{rank}((A+E)^2) = 4$. 矛盾.

(iii) 设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_2(0)$ 和 $J_2(0)$. 则

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 则

$$\operatorname{rank}(J_A^2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O_{4\times4} & \\ & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

矛盾.

(iv) 设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_3(0)$. 则

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_3(0) & \\ & & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 直接计算得

$$\mathrm{rank}(J_A^2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

则 $\mathrm{rank}(A^2) = 2$, 矛盾.

综上所述,

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix}.$$

关于 $\mathbb{C}$ 上 Jordan 标准型尚不知道的秘密:

(i) 唯一性是否成立?

(ii) 关于特征值 λ 的 Jordan 块的阶是多少?

11　初等因子组

记号: 除非特别说明, 在本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, 其中 F 是任意域.

重集 是指元素可以重复出现的集合.

例 11.1 设 $S = \{a, a, b\}$ 和 $T = \{a, b\}$. 它们作为重集不相等. 元素 a 在 S 中的重数等于 2, 在 T 中等于 1.

例 11.2 我们由素分解 $24 = 2^3 3$. 利用重集表示 *24* 的素因子为 $\{2, 2, 2, 3\}$.

定义 11.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \tag{3}$$

是 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解. 令 $\mathcal{A}_i{=}\mathcal{A}_{W_i}$ 和 $\mu_i{=}\mu_{\mathcal{A}_i}$. 重集 $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 (3) 的初等因子组.

由上一讲引理 10.5 可知, 初等因子组中的元素都是 $F[t]$ 中(首一)不可约多项式的幂次. 类似地, 我们可以定义矩阵的初等因子组.

例 11.4 设 $\mathcal{E}$ 是 V 上的恒同算子, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{e}_n \rangle,$$

是 V 的一个 $\mathcal{E}$-不可分子空间的直和分解. 算子 $\mathcal{E}$ 关于上述直和分解的初等因子组是

$$\{\underbrace{t-1,\ldots,t-1}_{n}\}.$$

例 11.5 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 上的导数算子. 则 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的初等因子组是 $\{t^n\}$.

在本节中, 我们将说明以下结论:

(i) 对于任何 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解, 初等因子组相同;

(ii) 当 $F=\mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型;

(iii) 初等因子组可以通过计算若干矩阵的秩得到.

引理 11.6 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $f\in F[t]$. 设

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_\ell, \tag{4}$$

其中 $U_1,\ldots,U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的子空间. 则

$$f(\mathcal{A})(V)=f(\mathcal{A})(U_1)\oplus\cdots\oplus f(\mathcal{A})(U_\ell).$$

证明. 设 $W=f(\mathcal{A})(U_1)+\cdots+f(\mathcal{A})(U_\ell)$. 因为 $U_i\subset V$, 所以 $f(\mathcal{A})(U_i)\subset f(\mathcal{A})(V)$. 于是, $W\subset f(\mathcal{A})(V)$. 反之, 设 $\mathbf{x}\in f(\mathcal{A})(V)$. 则存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mathbf{x}=f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 由 (4) 可知

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_\ell,$$

其中 $\mathbf{v}_i \in U_i, i = 1, 2, \ldots, \ell$. 由此得出

$$\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_\ell).$$

因为 U_i 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_i) \in U_i$. 故 $\mathbf{x} \in W$. 我们得到 $f(\mathcal{A})(V) = W$.

下面验证: $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. 设

$$\mathbf{0} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_\ell,$$

其中 $\mathbf{w}_i \in f(\mathcal{A})(U_i)$. 则 $\mathbf{w}_i \in U_i$. 由 (4) 可知, $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$ (第一章第二讲命题 4.16). 进而, 同样的命题蕴含 $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. □

引理 11.7 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$. 则*

$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)\deg(p), & 0 \le k \le m \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

证明. 当 $k \geq m$ 时, $p^k(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 故 $\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = 0$.

下面设 $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mathbf{v} \in V$ 是 $\mathcal{A}$-循环向量, 且 $\mathbf{w}_k = p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v})$.

断言 1. $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A})) = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$.

断言 1 的证明. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $f \in F[t]$ 使得 $\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$p^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = p^k(\mathcal{A}) f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A}) p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k.$$

由此得出, $\mathrm{im}(p^k(\mathcal{A})) \subset F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 反之, 由 $\mathbf{w}_k$ 的定义可知, $\mathbf{w}_k \in \mathrm{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 因为 $\mathrm{im}(p^k(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第三讲命题 5.5), 所以 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k \subset \mathrm{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 断言 1 成立.

断言 2. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}_k$ 上的限制算子, 则 $\mu_{\mathcal{B}}=p^{m-k}$.

断言 2 的证明. 设 $\mathbf{x} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 则存在 $g \in F[t]$ 使得

$$\mathbf{x} = g(\mathcal{B})p^k(\mathcal{B})(\mathbf{v}) \implies p^{m-k}(\mathcal{B})(\mathbf{x}) = g(\mathcal{B})p^m(\mathcal{B})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

故 $p^{m-k}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$. 故 $\mu_{\mathcal{B}}|p^{m-k}$. 反之, $\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$ 蕴含

$$\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \implies \mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})p^k(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies (\mu_{\mathcal{B}}p^k)(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

故 $\mu_{\mathcal{A}}|(\mu_{\mathcal{B}}p^k)$. 从而 $p^{m-k}|\mu_{\mathcal{B}}$. 综上所述, 断言 2 成立.

断言 1 和 2, 以及第二章第五讲定理 9.8 蕴含

$$\dim(\mathrm{im}(p^k(\mathcal{A}))) = (m-k)\deg(p).$$

根据第二章第一讲推论 1.14, $\mathrm{rank}(p^k(\mathcal{A}))=(m-k)\deg(p)$.

$\square$