定理 11.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$ 不可约. 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 设 n_ℓ 是 p^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中 p^ℓ 的重数. 令 $d = \deg(p)$ 和 $r_i = \operatorname{rank}(p^i(\mathcal{A})), i \in \mathbb{N}$. 则

$$n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell). \tag{1}$$

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{2}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 设 $\mathcal{A}_i$=$\mathcal{A}_{V_i}$ 和 μ_i=$\mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则存在 $m_1, \ldots, m_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 使得 $\mu_1 = p^{m_1}$, $\mu_2 = p^{m_2}$, $\ldots$, $\mu_k = p^{m_k}$. (见第二章第三讲定理 5.9). 由第二章第五讲定理 9.8 和第二章第五讲引理 9.15, $\dim(V_i) = m_i d$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 特别地, $\dim(V_i) \le md$. 令 $\mathbb{S}$=$\{V_1, \ldots, V_k\}$. 则 n_ℓ 是 $\mathbb{S}$ 中维数为 ℓd 的子空间的个数.

对 $j \in \{1, \ldots, m\}$, 令 $\mathbb{S}_j = \{U \in \mathbb{S} \,|\, \dim(U) = jd\}$. 则 (2) 可重写为

$$V = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} U \right). \tag{3}$$

根据上一讲引理 11.6, 我们有

$$p(\mathcal{A})^\ell(V) = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right).$$

注意到当 $U \in \mathbb{S}_j$ 时, U 不但是 $\mathcal{A}$-循环的且 $\mathcal{A}|_U$ 的极小多项式是 p^j. 根据上一讲引理 11.7, 当 $j > \ell$ 时,

$$\operatorname{rank}(p^\ell(\mathcal{A}|_U)) = (j-\ell)d \tag{4}$$

且当 $j \leq \ell$ 时, $p(\mathcal{A})^\ell(U)=\{\mathbf{0}\}$. 特别地, 上式可缩写为

$$p(\mathcal{A})^\ell(V) = \bigoplus_{j=\ell+1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in\mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U)\right). \tag{5}$$

我们运用维数和秩的关系推导:

$$\begin{aligned}
r_\ell &= \dim\left(p(\mathcal{A})^\ell(V)\right) \quad (r_\ell \text{ 的定义})\\
&= \dim\left(\bigoplus_{j=\ell+1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in\mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U)\right)\right) \quad (\text{根据 } (5))\\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j}\dim(p(\mathcal{A})^\ell(U))\right) \quad (\text{第一章第二讲命题 } 4.15)\\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j}\operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^\ell)\right) \quad (\text{限制算子和第二章第一讲推论 } 1.14)\\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j}(j-\ell)d\right) \quad ((4))\\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m} n_j(j-\ell)d \quad (n_j \text{ 的定义})
\end{aligned}$$

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$ 成立. 令 $r_0 = \dim(V)$. 则由上式和 (7), 我

们有

$$r_\ell = d\sum_{j=\ell+1}^{m} n_j(j-\ell) \tag{6}$$

对任意 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立.

我们要利用 (6) 把 $n_1, n_2, \ldots,$ 用 $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots,$ 表示出来. 根据 (6) 可知, 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$

$$r_{\ell-1} = d\left(n_\ell + 2n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell+1)\right),$$

$$r_\ell = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell)\right),$$

和

$$r_{\ell+1} = d\left(\sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell-1)\right).$$

于是,

$$r_{\ell-1}-r_\ell = d\left(n_\ell + n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right), \quad r_\ell-r_{\ell+1} = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right)$$

即

$$(r_{\ell-1}-r_\ell)-(r_\ell-r_{\ell+1}) = dn_\ell \implies n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1}+r_{\ell+1}-2r_\ell). \quad \square$$

例 11.9 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 8 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & -11 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

已知 $\chi_A = t^4$. 计算 J_A.

解. $r_0 = \operatorname{rank}(A^0) = 4$, $r_1 = \operatorname{rank}(A) = 2$. 于是, 0 的几何重数等于 2. 由此得出 J_A 中有两个关于 0 的 *Jordan* 块.

$$r_2 = \operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

于是

$$n_1 = 4 + 1 - 2 \times 2 = 1.$$

由此直接推出 $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$. 故

$$J_A = \begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 11.10 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的两两互素首一的不可约因子是 $p_1,\ldots,p_s$, 它们的次数分别是 $d_1,\ldots,d_s$. 设 $\ell\in\mathbb{Z}^+$, $i\in\{1,2,\ldots,s\}$, $N(i,\ell)$ 是 p_i^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中的重数. 则

$$N(i,\ell)=\frac{1}{d_i}(R(i,\ell-1)+R(i,\ell+1)-2R(i,\ell)),$$

其中 $R(i,j)=\operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$, $j\in\mathbb{N}$. 特别地, 任何 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解初等因子组都相等(称为 $\mathcal{A}$ 的初等因子组).

证明. 设

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k \tag{7}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 注意到对 $j=1,2,\ldots,k$, $\mu_j=\mu_{\mathcal{A}_{V_j}}$ 是某个 $p_1,\ldots,p_s$ 的幂次. 我们不妨对 $i=1$ 来证明定理的结论.

设 $\mathbb{S}=\{V_1,\ldots,V_k\}$ 且 $\mathbb{S}_1=\{U\in\mathbb{S}\mid p_1\mid\mu_{\mathcal{A}_U}\}$. 令

$$W=\bigoplus_{U\in\mathbb{S}_1}U \quad 和 \quad \widetilde{W}=\bigoplus_{U\in(\mathbb{S}\setminus\mathbb{S}_1)}U.$$

则

$$V=W\oplus\widetilde{W}. \tag{8}$$

断言 1. 对任意 $\ell\in\mathbb{N}$, 令 $r_\ell=\operatorname{rank}(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell)$. 则

$$N(1,\ell)=\frac{1}{d_1}(r_{\ell-1}+r_{\ell+1}-2r_\ell).$$

断言 1 的证明. 注意到 $\mathcal{A}_W$ 是 W 上的线性算子,

$$W=\bigoplus_{U\in\mathbb{S}_1}U$$

是 W 的 A_W-不可分子空间分解, 且 $\mathcal{A}_W$ 的极小多项式是 p_1 的某个幂次, 根据定理 11.8, p_1^ℓ 在 $\mathcal{A}_W$ 关于上述 W 的直和分解的初等因子组中出现的重数

$$n_\ell=\frac{1}{d_1}(r_{\ell-1}+r_{\ell+1}-2r_\ell).$$

再注意到对任意 $U\in(\mathbb{S}\setminus\mathbb{S}_1)$, $\mathcal{A}_U$ 的极小多项式都不是 p_1 的任何幂次. 于是 $N(1,\ell)=n_\ell$. 断言 1 成立.

断言 2. $p_1(\mathcal{A})|_{\widetilde{W}}$ 上可逆.

断言 2 的证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}_W}=p_1^m$ 且 $q=\mu_{\mathcal{A}_{\widetilde{W}}}$. 因为 q 是 $p_2,\dots p_s$ 的幂次之积 (第二章第二讲定理 6.9), 所以 p_1^m 与 q 互素. 于是 $\mu_{\mathcal{A}}=\mathrm{lcm}(p_1^m,q)=p_1^m q$ (第二章第二讲引理 6.7 和 定理 5.3). 根据 Bezout 关系, 存在 $a,b\in F[t]$ 使得 $a(t)p^m(t)+b(t)q(t)=1$. 故 $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A})+b(\mathcal{A})q(\mathcal{A})=\mathcal{E}$. 因为 $q(\mathcal{A})$ 限制在 $\tilde{W}$ 上是零算子, 所以对任意 $\mathbf{x}\in\tilde{W}$, $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A})(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. 故 $p^m(\mathcal{A})$ 在 $\tilde{W}$ 可逆. 进而, $p(\mathcal{A})$ 在 $\tilde{W}$ 上也可逆. 断言 2 成立.

断言 3. 对任意 $\ell\in\mathbb{N}$, $R(1,\ell)=r_\ell+\dim(\widetilde{W})$.

断言 3 的证明. 由上周讲义中引理 7.6,

$$p_1(\mathcal{A})^\ell(V)=p_1(\mathcal{A})^\ell(W)\oplus p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W}).$$

于是,

$$\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(W)) + \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W})).$$

根据断言 2, $\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell(W)) + \dim(\widetilde{W})$. 故 $R(1,\ell) = r_\ell + \dim(\widetilde{W})$. 断言 3 成立.

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 我们计算

$$\begin{aligned} N(1,\ell) &= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell) \ (\text{断言 } 1) \\ &= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + \dim \widetilde{W} + r_{\ell+1} \dim \widetilde{W} - 2(r_\ell + \dim \widetilde{W})) \\ &= \frac{1}{d_1}(R(1,\ell-1) + R(1,\ell+1) - 2R(1,\ell)) \ (\text{断言 } 3). \end{aligned}$$

由上述公式看出, 初等因子组只与 $p_i(\mathcal{A})^\ell$ 有关. 故初等因子组独立于 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的选择. □

定义 11.11 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 把 A 看成从 F^n 上的线性算子所对应的初等因子组称为矩阵 A 的初等因子组.

定理 11.12 *设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 在不计 Jordan 块的前提下, A 的 Jordan 标准型由 A 的初等因子组唯一确定.*

证明. 设 $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 确定. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}, i = 1, 2, \ldots, k$. 根据代数学基本定理, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in$

$\mathbb{C}$ (不必两两不同), $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu_1 = (t - \alpha_1)^{d_1}, \ldots, \mu_k = (t - \alpha_k)^{d_k}.$$

于是, $\mathcal{A}$ 的初等因子组是

$$\{(t - \alpha_1)^{d_1}, \ldots, (t - \alpha_k)^{d_k}\}.$$

根据第二章第五讲引理 11.1, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_s J_A$ 且 J_A 由$\mathcal{A}$ 的初等因子组唯一确定. $\square$

由上述定理可知, 记号 J_A 以及把 J_A 称为 A 的 Jordan 标准型都是合理的. 进而, 计算复数域上方阵的 Jordan 标准型等价于计算该矩阵的初等因子组.

注解 11.13 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 且 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的不可约因子是 $t - \lambda_1, \ldots, t - \lambda_s$. 我们可以把定理 *11.10* 中的 $R(i, \ell)$ 和 $N(i, \ell)$ 分别记为 $R(\lambda_i, \ell)$ 和 $N(\lambda_i, \ell)$. 此时的重数公式是

$$N(\lambda_i, \ell) = R(\lambda_i, \ell - 1) + R(\lambda_i, \ell + 1) - 2R(\lambda_i, \ell),$$

其中 $\lambda_i \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A), \ell \in \mathbb{Z}^+$.

例 11.14 设:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_7(\mathbb{C}).$$

计算 J_A.

解. 由计算机计算得:

$$\chi_{\mathcal{A}} = t^7 - 9\,t^6 + 34\,t^5 - 70\,t^4 + 85\,t^3 - 61\,t^2 + 24\,t - 4 = (t-2)^2(t-1)^5.$$

设 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = 1$. 显然 $R(\lambda_1, 0) = 7$. 由计算机得 $R(\lambda_1, 1) = 6, R(\lambda_1, 2) = 5$. 于是,

$$N(\lambda_1, 1) = R(\lambda_1, 0) + R(\lambda_1, 2) - 2R(\lambda_1, 1) = 7 + 5 - 2 \times 6 = 0.$$

由计算机得 $R(\lambda_1, 3) = 5.$, 于是,

$$N(\lambda_1, 2) = R(\lambda_1, 1) + R(\lambda_1, 3) - 2R(\lambda_1, 2) = 6 + 5 - 2 \times 5 = 1.$$

因为 λ_1 的代数重数等于 2, 所以当 $\ell > 2$ 时, $N(\lambda_1, \ell) = 0$.
显然 $R(\lambda_2, 0)=7$. 由计算机得 $R(\lambda_2, 1)=4, R(\lambda_2, 2)=2$. 于

是,

$N(\lambda_2,1)=R(\lambda_2,0)+R(\lambda_2,2)-2R(\lambda_1,1)=7+2-2\times 4=1.$

由计算机计算得 $R(\lambda_2,3)=2$. 于是,

$N(\lambda_2,2)=R(\lambda_2,1)+R(\lambda_2,3)-2R(\lambda_1,2)=4+2-2\times 2=2.$

因为 λ_2 的代数重数等于 5, 所以当 $\ell>2$ 时, $N(\lambda_2,\ell)=0$.

由此得出

$$J_A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.15 设 $A\in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$. 设

$\mathrm{rank}(A)=3$, $\mathrm{rank}(A^2)=2$, $\mathrm{rank}(A+E)=4$, $\mathrm{rank}((A+E)^2)=3$.

求 J_A

解. 由秩的条件可知 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=-1$ 是 A 的两个特征根. 根据上一讲定理 *11.10*,

$N(\lambda_1,1)=R(\lambda_1,0)+R(\lambda_1,2)-2R(\lambda_1,1)=5+2-2\times 3=1$

和

$$N(\lambda_2,1)=R(\lambda_2,0)+R(\lambda_2,2)-2R(\lambda_2,1)=5+3-2\times 4=0.$$

注意到 $\mathrm{rank}(A)=3$ 和 $\mathrm{rank}(A+E)=4$ 分别蕴含 λ_1 的几何重数是 2 和 λ_2 的几何重数是 1. 由此得出 $N(\lambda_1,2)=1$ 和 $N(\lambda_2,2)=1$. 我们有

$$J_A=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

12 矩阵相似的判定

引理 12.1 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(F)$ 且 $A\sim_s B$. 则对任意 $f\in F[t]$, $f(A)\sim_s f(B)$. 特别地, $\mathrm{rank}(f(A))=\mathrm{rank}(f(B))$.

证明. 设 $A=P^{-1}BP$, 其中 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$. 因为对任意 $k\in\mathbb{N}$, $A^k=P^{-1}B^kP$, 所以 $f(A)=P^{-1}f(B)P$. □

定理 12.2 *(相似判别法I)* 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(F)$. 则 $A\sim_s B$ 当且仅当 A 和 B 由共同的初等因子组.

证明. 设 $A\sim_s B$. 则 $\mu_A=\mu_B$ (第二章第二讲命题 4.9). 设 $p_1,\ldots p_s$ 是 μ_A 的两两互素的首一的不可约因子. 则它们

也是 μ_B 的两两互素的首一的不可约因子. 根据引理 12.1, 对任意 $\ell \in \mathbb{N}, i \in \{1,2,\ldots,s\}$, $\operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^\ell) = \operatorname{rank}(p_i(\mathcal{B})^\ell)$. 由上一讲定理 11.10, A 和 B 由共同的初等因子组.

反之, 设 A 和 B 由共同的初等因子组 $\{p_1,\ldots,p_k\}$. 把 A 和 B 看成 F^n 的算子分别记为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$. 令

$$F^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

其中 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的, W_i 是 $\mathcal{B}$-不可分的, i=$1,2,\ldots,k$. 调整下标后可再设 $\mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mathcal{B}_{W_i}$ 的极小多项式都是 p_i. 令

$$p_i = t^{d_i} + \alpha_{i,d_i-1}t^{d_i-1} + \cdots + \alpha_{i,1}t + \alpha_{i,0},$$

其中 $\alpha_{i,n-1},\ldots,\alpha_{i,1},\alpha_{i,0} \in F$. 因为 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 所以它是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是存在 $\mathbf{v}_i \in V$ 使得 $V_i = F[\mathcal{A}_{V_i}] \cdot \mathbf{v}_i$. 由此得出 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在基底 $\mathbf{v}_i, \mathcal{A}(\mathbf{v}_i), \ldots \mathcal{A}^{d_i-1}(\mathbf{v}_i)$ 下的矩阵是

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{i,0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{i,1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{i,d_i-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{d_i}(F).$$

同理存在 $\mathbf{w}_i \in V$ 使得 $W_i = F[\mathcal{B}_{V_i}]\mathbf{w}_i$, 且 $\mathcal{B}_{W_i}$ 在基底 $\mathbf{w}_i, \mathcal{B}(\mathbf{w}_i), \ldots \mathcal{B}^{d_i-1}(\mathbf{w}_i)$ 下的矩阵也是 M_i. 由第二章第三

讲定理 5.9,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} M_1 & O & \cdots & O \\ O & M_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & M_k \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B \sim_s \begin{pmatrix} M_1 & O & \cdots & O \\ O & M_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & M_k \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_s B$. □

定理 12.3 *(相似判别法II)* 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当下述两点同时成立:

(i) $\chi_A = \chi_B$, 或 $\mu_A = \mu_B$;

(ii) 设 $p_1, \ldots, p_s$ 是 χ_A 或 μ_A 在 $F[t]$ 中的两两互素的(首一的)不可约因子, 且

$$\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}, j \in \{1, 2, \ldots, s\},\ \operatorname{rank}(p_j(A)^i) = \operatorname{rank}(p_j(B)^i).$$

证明. 设 $A \sim_s B$. 则 $\chi_A = \chi_B$ 和 $\mu_A = \mu_B$ (第二章第三讲定义 7.6 后的讨论和第二章第二讲命题 4.9). 由引理 12.1, 对任意 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$,

$$p_j(A)^i \sim_s p_j(B)^i \implies \operatorname{rank}(p_j(A)^i) = \operatorname{rank}(p_j(B)^i).$$

反之, 设 $\chi_A = \chi_B$ 和 (ii), 或 $\mu_A = \mu_B$ 和 (ii) 成立. 则 A 和 B 由共同的初等因子组(上一讲定理 11.10). 于是, $A \sim_s B$ (定理 12.2). □

定理 12.4 *(相似判别法III)* 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当对任意 $f \in F[t]$, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}((f(B))$.

证明. 设 $A \sim_s B$. 引理 12.1 蕴含, 对任意 $f \in F[t]$, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}((f(B))$. 反之, 因为 $\mathrm{rank}(\mu_A(A))$=0, 所以 $\mathrm{rank}(\mu_A(B))$=0. 于是 $\mu_A(B)$=O. 由此可知 $\mu_B|\mu_A$(第二章第二讲引理 4.2). 同理 $\mu_A|\mu_B$. 于是, $\mu_A = \mu_B$. 由定理 12.3 可知, $A \sim_s B$. □.

例 12.5 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明: $A \sim_s A^t$.

证明. 注意到对任意 $f \in F[t]$, $f(A)^t$=$f(A^t)$. 故

$$\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}(f(A)^t) = \mathrm{rank}(f(A^t)).$$

由定理 *12.4* 可知, $A \sim_s A^t$. □

例 12.6 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 则存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$.

证明. 因为存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 所以对任意 $f \in \mathbb{C}[t]$, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}(f(B))$ (定理 *12.4*. 特别地, 任意 $g \in \mathbb{R}[t]$, $\mathrm{rank}(g(A)) = \mathrm{rank}(g(B))$. 再由定理 *12.4*, 存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$. □

例 12.7 设 $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 证明:

$$J_A=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

蕴含

$$J_{A^{-1}}=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1^{-1}) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2^{-1}) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k^{-1}) \end{pmatrix}.$$

证明. 首先, $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 蕴含 A 的特征根非零. 于是, λ_i^{-1} 有意义. 设 $\lambda\in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$. 则

$$|\lambda E-A|=0 \iff |A||\lambda A^{-1}-E|=0 \iff |\lambda^{-1}E-A^{-1}|=0.$$

即 $\lambda\in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) \iff \lambda^{-1}\in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A^{-1})$. 于是, $p_\lambda=t-\lambda$ 是 χ_A 的因子当且仅当 $q_\lambda=t-\lambda^{-1}$ 是 $\chi_{A^{-1}}$ 的因子. 设 $\ell\in\{0,1,\ldots,n\}$. 则

$$\mathrm{rank}((A-\lambda E)^\ell)=\mathrm{rank}(A^\ell(E-\lambda A^{-1})^\ell)=\mathrm{rank}((\lambda^{-1}E-A^{-1})^\ell).$$

于是, 对任意 $\ell\in\{0,1,\ldots,n\}$, $\mathrm{rank}(p_\lambda(A)^\ell)=\mathrm{rank}(q_\lambda(A)^\ell)$. 根据上一讲定理 *11.10*, 对任意 $\lambda\in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$, p_λ 在 A 的初等因子组中的重数等于 q_λ 在 A^{-1} 的初等因子组中的重

数. 故对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$, $J_m(\lambda)$ 出现在 J_A 中的重数等于 $J_m(\lambda^{-1})$ 出现在 $J_{A^{-1}}$ 中的重数. $\square$

注解 12.8 上述例子说明: 如果 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{1,-1\}$, 则 $A\sim_s A^{-1}$.

第三章　内积空间

1　欧式空间

约定: 在本节中 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间.

1.1　V 上的内积

定义 1.1 设 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 V 上的对称双线性型满足 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ 是正定的. 则称 (V,f) 是一个欧式空间, f 是 V 上的内积.

例 1.2 *(标准欧式空间)* 设 $V=\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcl} f:\ V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{x}^t\mathbf{y}. \end{array}$$

注意到 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^tE\mathbf{y}$. 于是, f 是 $\mathbb{R}^n$ 对称双线性型, 且 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{x}^t\mathbf{x}$ 是正定的. 于是, (V,f) 是欧式空间.

例 1.3 设 $V=\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} f:\ V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & \mathrm{tr}(X^tY). \end{array}$$

下面我们来验证 f 是 V 上的内积.

首先设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in V$,

$$\begin{aligned}
f(\alpha A+\beta B, Y) &= \operatorname{tr}((\alpha A+\beta B)^t Y) && (f \text{ 的定义}) \\
&= \operatorname{tr}((\alpha A^t+\beta B^t) Y) && (\text{转置的性质}) \\
&= \operatorname{tr}(\alpha(A^t Y)+\beta(B^t Y)) && (\text{矩阵乘法分配律}) \\
&= \alpha \operatorname{tr}(A^t Y)+\beta \operatorname{tr}(B^t Y) && (\operatorname{tr} \text{ 是线性函数}) \\
&= \alpha f(A, Y)+\beta f(B, Y) && (f \text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

于是, f 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 f 关于第二个变元也是线性的. 故 f 是双线性型. 注意到

$$f(Y, X)=\operatorname{tr}(Y^t X)=\operatorname{tr}((Y^t X)^t)=\operatorname{tr}(X^t Y)=f(X, Y).$$

于是, f 是对称的. 设 $X=(x_{i,j}) \neq O$. 则

$$f(X, X)=X^t X=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j}^2>0.$$

于是, $f(X, X)$ 是正定的. 由此得出 (V, f) 是欧式空间.

例 1.4 设 $V=\mathbb{R}[x]^{(n)}$, $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a<b$.

$$\begin{array}{rccc}
\phi: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (f, g) & \mapsto & \int_a^b f(x) g(x)\, dx.
\end{array}$$

下面我们来验证 ϕ 是 V 上的内积. 首先设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p, q \in V$.

则

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha p+\beta q,g) &= \int_a^b(\alpha p(x)+\beta q(x))g(x))dx \quad (\phi\text{ 的定义}) \\
&= \alpha\int_a^b p(x)g(x)dx+\beta\int_a^b q(x)g(x)dx \quad (\int_a^b\text{ 线性}) \\
&= \alpha f(p,g)+\beta f(q,g) \quad (f\text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

于是, ϕ 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 ϕ 关于第二个变元也是线性的. 故 ϕ 是双线性型. ϕ 显然是对称的. 设 $f\in R[x]^{(n)}\setminus\{0\}$. 则 $\phi(f,f)=\int_a^b f(x)^2dx>0$. 于是, $\phi(f,f)$ 是正定的. 由此得出 (V,ϕ) 是欧式空间.

我们把欧式空间 V 上的内积记为 $(\ |\ )$. 即

$$\begin{aligned}
(\,|\,):\ V\times V &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\
(\mathbf{x},\mathbf{y}) &\mapsto \quad (\mathbf{x}|\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

利用上述符号, 内积的基本性质如下:

(i) (双线性)对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$(\alpha\mathbf{x}+\beta y|\mathbf{z})=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z})+\beta(\mathbf{y}|\mathbf{z}),\quad (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z})=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\beta(\mathbf{x}|\mathbf{z}).$$

(ii) (对称性)对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.

(iii) (正定性)对任意 $\mathbf{x}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x})\geq 0 \quad \text{且} \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x})=0\iff \mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

定义 1.5 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\in V$. 定义

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m)=((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{m\times m}.$$

称之为 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m$ 的 Gram 矩阵.

由内积的对称性可知 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m)$ 是对称的.

命题 1.6 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\in V$, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, $\beta_1,\dots,\beta_m\in\mathbb{R}$. 令

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_m\mathbf{v}_m \text{ 和 } \mathbf{y}=\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_m\mathbf{v}_m).$$

则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}.$$

证明. 利用内积的双线性性得出

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\mathbf{y})&=(\sum_{i=1}^m\alpha_i\mathbf{v}_i|\sum_{j=1}^m\alpha_j\mathbf{v}_j)\\ &=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\alpha_i\beta_j(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j)\quad\text{(双线性)}\\ &=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}.\quad\square\end{aligned}$$

命题 1.7 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. 则 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当 $\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)) < m$.

证明. 设 $\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)) < m$. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ 不全为零, 使得

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m$. 由命题 1.6 和上式可知,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = 0.$$

根据内积的正定性推出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性相关.

反之, 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性相关. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

令

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

则对 $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}
0 = (\mathbf{v}_i|\mathbf{0}) &= (\mathbf{v}_i|\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{v}_j) \\
&= (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \ldots, 0) G(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \\
&= \gamma_i.
\end{aligned}$$

于是, 以 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解. 故 $\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) < m$. □

注解 1.8 由上述两个命题可知, $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ 是半正定的. 它是正定的当且仅当 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 线性无关.