第三章　内积空间

命题 4.5 设欧式空间 V 由基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足 $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P$. 再设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基当且仅当 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

证明. 设 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基. 由引进正交矩阵的概念的推导过程可知, $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 反之, 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$(\epsilon_i|\epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(i)}|(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t\vec{P}^{(j)} = \delta_{i,j}.$$

故 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基. □

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. 则存在唯一的 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)P$. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B. 根据第二章第一讲第 2.2 节第一段,

$$B = P^{-1}AP = P^tAP \quad (\because\ P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})).$$

定义 4.6 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 正交等价(正交相似), 记为 $A \sim_o B$.

我们来验证 $\sim_o$ 是等价关系. 因为 $E \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 所以对任意 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A = E^{-1}AE$. 故 $A \sim_o A$. 自反性成立.

设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 满足 $A \sim_o B$. 则存在 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 于是, $A = PBP^{-1}$. 根据上周讲义中命题 4.2, $P^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 我们得到 $B \sim_o A$. 对称性成立.

再设 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且 $A \sim_o B$ 和 $B \sim_o C$. 则存在 $P, Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$ 和 $C = Q^{-1}BQ$. 于是, $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$. 根据上周讲义中命题 4.2, $PQ \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 故 $A \sim_o C$. 传递律成立. 验证完毕.

注解 4.7 符号如定义 *4.6*, 如果 $A \sim_o B$, 则 $A \sim_s B$ 且 $A \sim_c B$. 这是因为正交矩阵的逆和转置相等. 由此可得, 矩阵的相似不变量和合同不变量都是正交等价的不变量.

例 4.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

证明: $A \sim_s B$, $A \sim_c B$ 但 $A \not\sim_o B$.

证明. 显然 $\chi_A = \chi_B = t^2$. 因为 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ 且 $\mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}(B^2)$. 根据相似判定法则 I, $A \sim_s B$. 设 $P = \mathrm{diag}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 则 $P^tAP = B$. 于是, $A \sim_c B$.

假设存在 $Q \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ 使得 $Q^tAQ = B$. 根据上周讲义例 *4.4*, 我们有

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad 或 \quad Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

如果 Q 为前者, 则 $AQ = QB$ 蕴含

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\sin(\theta) = 0$ 且 $\cos(\theta) = 0$. 矛盾. 类似地可证明 Q 也不可能等于后者. □

问题. 给定 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

1. 求它在正交等价下的标准型.
2. 给定 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 判定它们是否正交等价.

5 正规矩阵与正规算子

记号：在本节中 V 是 n 维欧式空间, 其中 $n > 0$.

5.1 正规矩阵和正规算子

定义 5.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t = A^tA$, 则称A是正规的.

例 5.2 证明对称，斜对称和正交矩阵都是正规矩阵.

证明. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A^tA = A^2 = AA^t$. 故 A 正规.

设 $A \in \mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A^tA = -A^2 = AA^t$. 故 A 正规.

设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 $P^tP = E = PP^{-1} = PP^t$. 故 P 是正规矩阵. □

例 5.3 设 $A, B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且 $A\sim_o B$. 则 A 正规蕴含 B 正规.

证明. 设 $B = P^tAP$, 其中 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则

$$B^tB = P^tA^tPP^tAP = P^tA^tAP = P^tAA^tP = P^tAPP^tA^tP = BB^t.$$

故 B 正规. □

定义 5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是正规的, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子.

由例 5.3 可知, 算子的正规性是良定义的.

定义 5.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 对称算子. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = -(\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 斜对称算子.

命题 5.6 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{i,})_{n\times n}$. 则 $\mathcal{A}$ (斜)对称算子当且仅当 A(斜)对称矩阵.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 是对称算子. 则对任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$a_{i,j} = (\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j|\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)) = (\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_j) = a_{j,i}.$$

故 A 对称.

反之, 设 A 对称. 则对任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$a_{i,j} = a_{j,i} \Longrightarrow (\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j|\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)).$$

由此和 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标可得

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

故 $\mathcal{A}$ 对称.

斜对称情形类似. $\square$

定义 5.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内*(*积*)*的.

命题 5.8 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 保内*;*

(ii) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*;*

(iii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ *(*保长*);*

(iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ *(*保距*).*

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\delta_{i,j} = (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(i)}|(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)}) = (\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)}.$$

于是, $A^t A = E$. 即 $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 我们计算

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x})) &= ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} |(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \\ &= (x_1, \ldots, x_n)A^t A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + \cdots + x_n^2.\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\| \Rightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathbf{x}-\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是,

$$\|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})) + \|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2.$$

注意到 $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{0})\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2$. 同理 $\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2$. 由上式可得 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))$. □

注解 5.9 由例 *5.2* 可知, 所以对称，斜对称，正交算子都是正规算子.

例 5.10 设 $\mathbf{v} \in V$ 满足 $\|\mathbf{v}\| = 1$. 定义

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\colon V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x}. \end{aligned}$$

证明*:* $\mathcal{A}$ 是既对称又正交.

证明. 根据单位正交基的可扩充性*(*上周讲义推论 *2.3), V* 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2, \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = -\mathbf{e}_n.$$

于是, $\mathcal{A}$ 在该基底下的矩阵是 $A = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$. 因为 A 对称且正交, 所以 $\mathcal{A}$ 对称且正交. □

5.2 正规算子的不可分子空间分解

引理 5.11 设 n 阶实方阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k)\times k} & D \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } B \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R}).$$

如果 A 正规, 则 $C = O_{k\times(n-k)}$.

证明. 因为 $A^tA = AA^t$, 所以

$$\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}.$$

于是, $B^tB = BB^t + CC^t$. 由此得出,

$$\mathrm{tr}(B^tB) = \mathrm{tr}(BB^t + CC^t) = \mathrm{tr}(BB^t) + \mathrm{tr}(CC^t).$$

因为矩阵的迹是交换不变量, 所以 $\mathrm{tr}(BB^t) = \mathrm{tr}(B^tB)$. 故 $\mathrm{tr}(CC^t) = 0$. 设 $C = (c_{i,j})_{d\times(n-d)}$. 则

$$\mathrm{tr}(CC^t) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n-d} c_{i,j}^2.$$

故 $\mathrm{tr}(CC^t) = 0$ 蕴含 $C = O_{d\times(n-d)}$. □

引理 5.12 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, $W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则*

(i) $W^\perp$ 是 $\mathcal{A}$-子空间;

(ii) $\mathcal{A}$ 在 W 上的限制算子 $\mathcal{A}_W$ 是正规算子.

证明. (i) 设 $n = \dim(V)$ 且 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 是 W 的一组单位正交基. 根据第三章第二讲定理 2.2 (ii), $V = W \oplus W^\perp$. 于是, $\dim(W^\perp) = n - k$. 设 $\epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是 $W^\perp$ 的一组单位正交基. 则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是 V 的单位正交基. 因为W是$\mathcal{A}$-不变的, 所以$\mathcal{A}$在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

其中 $B\in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$. 因为 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_k,\epsilon_{k+1},\dots,\epsilon_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 是正规算子, 所以 A 正规 (第三章第二讲命题 5.4). 根据引理 5.11, $C=O_{k\times(n-k)}$. 于是,

$$(\mathcal{A}(\epsilon_{k+1}),\dots,\mathcal{A}(\epsilon_n))=(\epsilon_{k+1},\dots,\epsilon_n)D.$$

故 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的.

(ii) 由 (i) 的证明可知,

$$A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

因为 $AA^t=A^tA$, 所以 $BB^t=B^tB$. 由此得出 B 是正规矩阵. 而 B 是 $\mathcal{A}_W$ 在单位正交基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$ 下的矩阵. 根据第三章第二讲命题 4.4, $\mathcal{A}_W$ 正规. □

引理 5.13 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 V 有一维或二维的 $\mathcal{A}$ 子空间.

证明. 因为 $\mathbb{R}[t]$ 中的非平凡不可约多项式的次数都不大于 2 (本学期第一章第三讲推论 3.12), 所以 $\mu_{\mathcal{A}}=pq$, 其中 $p,q\in\mathbb{R}[t]$, $0<\deg(p)\le 2$, p 在 $\mathbb{R}[t]$ 中不可约. 因为 $\deg(q)<\deg(\mu_{\mathcal{A}})$, 所以 $q(\mathcal{A})\neq\mathcal{O}$. 于是, 存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mathbf{w}:=q(\mathcal{A})(\mathbf{v})\neq\mathbf{0}$. 设 $W=F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}$. 则 $\dim(W)>0$. 因为

$$p(\mathcal{A})(\mathbf{w})=p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mu_{\mathcal{A}}(\mathbf{v})=\mathbf{0},$$

所以 $\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}})\le 2$. 从而 $\dim(W)\le 2$ (第二章第四讲命题 9.2 (iii)). □

定理 5.14 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, $n = \dim(V)$. 则

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1, \ldots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(ii) $U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 是一维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(iii) $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 两两正交.

证明. 对 $\dim(V)$ 归纳. 当 $\dim(V) = 1$ 时, 设 $s = 0$, $U_1 = V$ 即可. 设 $1 \leq \dim(V) < n$ 时定理成立. 由引理 5.13, 存在 $\mathcal{A}$-子空间 U 使得 $0 < \dim(U) \leq 2$. 如果 $\dim(U) = 1$, 则 U-是 $\mathcal{A}$-不可分的. 如果 $\dim(U) = 2$ 但 U 是 $\mathcal{A}$-可分的, 则 U 中有一维 $\mathcal{A}$ 不变子空间. 于是, 不妨设 U 是 V 中维数不超过 2 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间.

根据引理 5.12, $V = U \oplus U^{\perp}$ 且 $\mathcal{A}_{U^{\perp}}$ 是 $U^{\perp}$ 上的正规算子. 根据归纳假设, $U^{\perp}$ 是两两正交的维数不大于 2 的 $\mathcal{A}_{U^{\perp}}$-不变子空间之和. 又因为 U 与 $U^{\perp}$ 中的任何子空间都正交, 所以定理成立. □

5.3 正规算子和正规矩阵的标准型

设 $\dim(V)=1$ 且任意的 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 都是正规算子. 这是因为对 V 中的单位向量 $\mathbf{v}$, $\mathcal{A}(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$, 其中 λ 是某个实数.

引理 5.15 设 $\dim(V)=2$, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规, 且 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的任意单位正交基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 且 $\beta\neq 0$.

证明. 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是 V 的一组单位正交基, A 是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 下的矩阵. 则 A 正规. 设

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

由 $A^tA=AA^t$ 得

$$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{cases}a^2+c^2=a^2+b^2\\ ab+cd=ac+bd\\ b^2+d^2=c^2+d^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c^2=b^2\\ ab+cd=ac+bd\end{cases}$$

情形 1. $b=c$. 则 $\chi_A=t^2-(a+d)t+ad-b^2$. 其判别式是 $(a-d)^2+4b^2\geq 0$. 故 $\mathcal{A}$ 有实特征根 λ. 设 $\mathbf{v}$ 是 λ 的一个特征向量. 则 $\langle\mathbf{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 于是, $V=\langle\mathbf{v}\rangle\oplus\langle\mathbf{v}\rangle^{\perp}$. 根据引理 5.12, V 是 $\mathcal{A}$-可分的, 矛盾.

情形 *2.* $b=-c$ 且 $c\neq 0$. 则 $a=d$. 故

$$A=\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

直接验证可得 A 是正规的. □

我们把矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

记为 $N(\alpha,\beta)$, 其中 $\beta\neq 0$.

定理 5.16 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\ \lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 其中 $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵等于

$$\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 根据定理 5.14,

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_s\oplus U_{2s+1}\oplus\cdots\oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1,\dots,U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(ii) $U_{2s+1},\dots,U_n$ 是一维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(iii) $U_1,\dots,U_s,U_{2s+1},\dots,U_n$ 两两正交.

设 $\mathbf{e}_{2i-1},\mathbf{e}_{2i}$ 是 U_i 的单位正交基, $i=1,2,\dots,s$, $\mathbf{e}_j$ 是 U_j 中的单位向量, $j=2s+1,\dots,n$. 根据引理 5.15, 存在 $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$, $\beta_i\neq 0$, 使得正规算子 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在 $\mathbf{e}_{2i-1},\mathbf{e}_{2i}$ 下的矩阵是 $N(\alpha_i,\beta_i)$, $i=1,2,\dots,s$. 对于一维不变子空间 U_j, 存在 $\lambda_j\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)=\lambda_j\mathbf{e}_j,\quad j=2s+1,\dots,n.$$

因为 $U_1,\dots,U_s,U_{2s+1},\dots,U_n$ 两两正交, 所以

$$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_{2s-1},\mathbf{e}_{2s},\mathbf{e}_{2s+1},\dots,\mathbf{e}_n$$

是 V 的一组单位正交基, 且 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵如定理所述. $\square$

推论 5.17 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 正规. 则存在 $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_s,\beta_s$,

$\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 其中 $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$, 使得

$$A\sim_o B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 给出, 其中 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 把 $\mathbb{R}^n$ 看成标准欧式空间, 则标准基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵等于 A. 因为 A 正规, 所以 $\mathcal{A}$ 正规. 直接应用上述定理即可. □

命题 5.18 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 则 $V^{\lambda_1}\perp V^{\lambda_2}$.

证明. 设 $\mathbf{v}_2\in V^{\lambda_2}$. 因为 V^{λ_1} 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以上述引理蕴含 $\left(V^{\lambda_1}\right)^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 不变的. 因为 $V=V^{\lambda_1}\oplus\left(V^{\lambda_1}\right)^\perp$, 所以

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{w},$$

其中 $\mathbf{v}_1\in V^{\lambda_1}$, $\mathbf{w}\in\left(V^{\lambda_1}\right)^\perp$. 把上式两侧作用 $\mathcal{A}$ 得

$$\lambda_2\mathbf{v}_2=\lambda_1\mathbf{v}_1+\mathcal{A}(\mathbf{w}).$$

故

$$(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{v}_1+(\lambda_2\mathbf{w}-\mathcal{A}(\mathbf{w}))=\mathbf{0}.$$

因为 $(\lambda_2\mathbf{w}-\mathcal{A}(\mathbf{w}))\in\left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$, 所以 $(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$. 因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 $\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$. 于是, $\mathbf{v}_2=\mathbf{w}$. 故 $\mathbf{v}_2\perp V^{\lambda_1}$. □

6 实对称矩阵

6.1 实对称矩阵的正交标准型

定理 6.1 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A\sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 不必两两不同. 特别地, 实对称矩阵的特征根都是实数.

证明. (i) 由推论 5.17 可知,

$$A\sim_o B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\ \lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$. 因为 A 对称, 所以 B 对称. 设 $s>0$. 则 $N(\alpha_1,\beta_1)$ 是对称矩阵. 由此可知, $\beta_1=0$. 矛盾. 故 $s=0$. □

问题. 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 求 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

基本步骤. 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中,

1. 计算 A 的特征根. 设互不相同的特征根是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$;
2. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 求 V^{λ_i} 的一组基;
3. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_i} 的一组单位正交基; $\mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,d_i}$
4. 根据命题 5.18 和对角化判别法II, $\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{1,d_1}$, $\ldots$, $\mathbf{e}_{k,1}, \ldots, \mathbf{e}_{k,d_k}$ 是 V 的一组单位正交基且在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是对角的.

例 6.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_4(\mathbb{R}).$$

计算 $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ 和对角阵 B 使得 $B = P^{-1}AP$.

解. 由计算机计算得 $\chi_A(t) = (t-1)^3(t+3)$. 于是, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. 计算 V^{λ_1} 的一组基. 已知 $\dim(V^{\lambda_1}) = 3$. 于是, $\mathrm{rank}(\lambda_1 E - A) = 1$. 我们只要考虑方程

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

的解空间即可. 直接得出

$$V^{\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

计算 V^{λ_2} 的一组基. 因为 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$ 且 $\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$, 所以 $V^{\lambda_2} = V^{\lambda_1})^{\perp}$. 由此可知,

$$V^{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_1} 的一组单位正交基得

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^t, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^t, \quad \epsilon_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^t.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_2} 的一组单位正交基得: $\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^t$. 故

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

我们得到 $P^tAP = \mathrm{diag}(1,1,1,-3)$. □

6.2 正交标准型与二次型的矩阵表示

推论 6.3 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 A 的正(负)惯性指数等于 A 中正(负)根的个数(在记重数的意义下). 特别地, A (半)正定当且仅当 A 的特征根都是正的(非负的).

证明. 由定理 6.1 (ii) 和 (iii), $A \sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 因为 $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 A 的签名与 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 的签名相同. $\square$

定理 6.4 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定. 则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP = E$ 和 P^tBP 是对角阵.

证明. 因为 A 正定, 所以存在 $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P_1^tAP_1 = E$ (惯性定理). 令 $C = P_1^tBP_1$. 则 C 对称. 根据第三章第三讲定理 6.1 (ii), 存在 $P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 使得 $D = P_2^tCP_2$ 是对角阵. 令 $P = P_1P_2$. 则 $P^tBP = P_2^tCP_2 = D$ 且 $P^tAP = P_2^tEP_2 = P_2^tP_2 = E$ ($\because$ $P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$). $\square$

例 6.5 设 A, B 是两个 n 阶正定矩阵. 证明:

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B).$$

证明. 由上述定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP = E$ 和 $P^tBP = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 于是

$$P^tAP + P^tBP = \mathrm{diag}(1 + \alpha_1, \ldots, 1 + \alpha_n).$$

两边取行列式得

$$\det(P)^2\det(A+B)=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i).$$

而

$$\det(P)^2(\det(A)+\det(B))=\det(P^tAP)+\det(P^tBP)=1+\prod_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

因为 B 正定, 所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}^+$. 于是

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\geq 1+\prod_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

由此可知, $\det(P)^2\det(A+B)\geq\det(P)^2(\det(A)+\det(B))\implies\det(A+B)\geq\det(A)+\det(B)$. □

7 斜对称矩阵

定理 7.1 设 $A\in\mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 则存在 $\beta_1,\ldots,\beta_s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 则

$$A\sim_o M=\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

进而, A 的特征根是零或者纯虚数.

证明. (i) 由推论 5.17,

$$A \sim_o B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1\cdots\beta_s \neq 0$. 因为 A 斜对称, 所以 B 斜对称. 则 $N(\alpha_i,\beta_i)$ 斜对称. 由此可知, $\alpha_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,s$. 同理, $\lambda_{2s+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. 因为 $A \sim_o M$, 所以 $A \sim_s M$. 故 $\chi_A = \chi_M$. 故

$$\chi_A(t) = (t^2+\beta_1^2)\cdots(t^2+\beta_s^2)t^{n-2s}. \quad \square$$

例 7.2 设 $A \in \mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 证明 $E+A$ 可逆.

证明. 根据定理 *7.1*, 存在 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP = M$, 其中 M 由定理 *7.1* 给出. 于是,

$$P^t(E+A)P = E+M = \begin{pmatrix} N(1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(1,\beta_s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(E+M)=(1+\beta_1^2)\cdots(1+\beta_s^2)\neq 0$. 所以 $E+A$ 可逆. $\square$

8 正交矩阵

定理 8.1 设 $A\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则存在 $\theta_1,\ldots,\theta_s\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 和 $\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\{-1,1\}$ 使得

$$A\sim_o M=\begin{pmatrix} N(\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\cos(\theta_s),\sin(\theta_s)) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

进而, 正交矩阵的(复)特征根的复数模长都等于 1.

证明. 由推论 5.17 可知,

$$A\sim_o B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\ \lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$. 因为 A 正交, 所以 B 正交. 设 $s>0$. 则 $N(\alpha_i,\beta_i)$ 是正交

矩阵且无实特征根. 故存在 $\theta_i \in (0,\pi)$ 使得 $N(\alpha_i,\beta_i) = N(\cos(\theta_i),\sin(\theta_i))$, $i=1,2,\ldots,s$. 类似, λ_j 是一行一列的正交矩阵. 故 $\lambda_j \in \{-1,1\}$.

对任意 $\theta \in (0,\pi)$, $N(\cos(\theta),\sin(\theta))$ 的特征多项式等于 $t^2-2\cos(\theta)t+1$. 其根 $\lambda=\cos(\theta)\pm\sin(\theta)\sqrt{-1}$. □

例 8.2 设 $P\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 满足 $\det(P)=-1$. 证明: $\det(E+P)=0$.

证明. 根据定理 *8.1*, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}PQ=M$, 其中 M 如该定理所述. 因为 $\det(P)=-1$, 所以 $\det(M)=-1$. 于是, 存在 $j\in\{2s+1,\ldots,n\}$ 使得 $\lambda_j=-1$. 我们计算得 $Q^{-1}(E+P)Q=E+M$. 从而, 行列式 $|E+P|$ 等于

$$|N(1+\cos(\theta_1),\sin(\theta_1))|\cdots|N(1+\cos(\theta_s),\sin(\theta_s))|(1+\lambda_{2s+1})\cdots(1+\lambda_n)=0. \quad \square$$