第三章　内积空间

9　谱分解定理、平方根和极化分解

9.1　谱分解定理

在本小节中, V 是任意域 F 上的线性空间.

定义 9.1 设 $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathcal{L}(V)$. 如果

(i) *(正交性)* 对任意 $i, j \in \{1, \dots, k\}$ 且 $i \neq j$, $\sigma_i \circ \sigma_j = \mathcal{O}$,

(ii) *(等方性)* 对任意 $i \in \{1, \dots, k\}$, $\sigma_i^2 = \mathcal{E}$,

(iii) （完全性） $\sigma_1 + \cdots + \sigma_k = \mathcal{E}$,

则称 $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ 是完全正交等方组.

例 9.2 设 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$, 其中 $U_1, \dots, U_k$ 是子空间. 设 $\pi_i : V \to V$ 是从 V 到 U_i 的投射, 即

$$\begin{array}{cccc} \pi_i & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i & \mapsto & \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x} \in U_i. \end{array}$$

则 $\pi_1, \dots, \pi_k$ 是完全正交等方组.

引理 9.3 设 $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathcal{L}(V)$ 是完全正交等方组. 证明:

$$V = \operatorname{im}(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{im}(\sigma_k).$$

证明. 由完全性, 对任意 $\mathbf{x} \in V$,

$$\mathbf{x} = \mathcal{E}(\mathbf{x}) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k)(\mathbf{x}) = \sigma_1(\mathbf{x}) + \cdots + \sigma_k(\mathbf{x}).$$

故

$$\mathbf{x} \in \mathrm{im}(\sigma_1) + \cdots + \mathrm{im}(\sigma_k) \Rightarrow V = \mathrm{im}(\sigma_1) + \cdots + \mathrm{im}(\sigma_k).$$

设

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k,$$

其中 $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{im}(\sigma_1), \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathrm{im}(\sigma_k)$. 则存在 $y_1, \ldots, y_k \in V$ 使得 $\mathbf{x}_1 = \sigma_1(\mathbf{y}_1), \ldots, \mathbf{x}_k = \sigma_k(\mathbf{y}_k)$. 故

$$\sigma_1(\mathbf{y}_1) + \cdots + \sigma_k(\mathbf{y}_k) = \mathbf{0}.$$

两边同时作用 σ_1 并利用正交性得

$$\sigma_1^2(\mathbf{y}_1) = \mathbf{0}.$$

在利用等方性得

$$\sigma_1(\mathbf{y}_1) = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}.$$

同理 $\mathbf{x}_2 = \cdots = \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.. 于是, $\mathrm{im}(\sigma_1) + \cdots + \mathrm{im}(\sigma_k)$ 是直和 (第三周第一章定理 1.11).

引理 9.4 设 $\pi_1, \ldots, \pi_k$ 是 V 上的正交等方组, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$. 则对于任意非负整数 m,

$$(\alpha_1\pi_1 + \cdots + \alpha_k\pi_k)^m = \alpha_1^m\phi_1 + \cdots + \alpha_k^m\pi_k.$$

证明. 对 m 归纳. 当 $m=0,1$ 时结论显然. 设 $m>1$ 且当 $m-1$ 时结论成立. 则

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\pi_1+\cdots+\alpha_k\pi_k)^m &= (\alpha_1\pi_1+\cdots+\alpha_k\pi_k^{m-1})(\alpha_1\pi_1+\cdots+\alpha_k\pi_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i^{m-1}\alpha_j\pi_i^{m-1}\pi_j \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i^m\pi_i^m \quad (\text{正交性 } \pi_i\pi_j=\mathcal{O},\, i\neq j) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i^m\pi_i. \quad (\text{等方性 } \pi_i^2=\pi). \quad \square
\end{aligned}$$

下述定理称为谱分解定理(见科斯特利金第二卷 117 页).

定理 9.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化. 则

(i) 存在唯一的 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in F$, 两两不同, 和完全正交等方组 $\pi_1,\ldots,\pi_k$ 满足

$$\mathcal{A}=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k;$$

(ii) 存在 $f_1,\ldots,f_k\in F[t]$ 满足 $f_i(\lambda_j)=\delta_{i,j}$, $\pi_i=f_i(\mathcal{A})$, $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$.

证明. (i) 因为 $\mathcal{A}$ 可对角化, 所以

$$V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}, \tag{1}$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的互不相同的特征值. (见对角化判别法II). 设 π_i 是关于上述直和的第 i 个投影, $i = 1, 2, \dots, k$. 则 $\pi_1, \dots, \pi_k$ 是完全正交等方组 (见第一章第七讲命题12.2). 对任意 $\mathbf{x} \in V$. 由 (1) 可知, 存在

$$\mathbf{x}_1 \in V_1^{\lambda}, \dots, \mathbf{x}_k \in V_k^{\lambda}$$

使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k.$$

于是

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \mathcal{A}(\mathbf{x}_k) = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k.$$

因为 $\pi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, 所以

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda_1 \pi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_k \pi_k(\mathbf{x}) = (\lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k)(\mathbf{x}).$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $\mathcal{A} = \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k$. 存在性成立.

再设 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 是一个完全正交等方组满足

$$\mathcal{A} = \alpha_1 \sigma_1 + \cdots + \alpha_m \sigma_m,$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$, 两两不同. 根据引理 9.3,

$$V = \operatorname{im}(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{im}(\sigma_m) \tag{2}$$

且 σ_i 是关于该直和的第 i 个投影, $i=1,2,\ldots,m$. 设 $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{im}(\sigma_1)\setminus\{\mathbf{0}\}$. 则存在 $\mathbf{y}_1 \in V$ 使得 $\mathbf{x}_1=\sigma_1(\mathbf{y}_1)$. 于是

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) &= (\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\sigma_2\cdots+\alpha_m\sigma_m)(\sigma_1(\mathbf{y}_1))\\
&= \alpha_1\sigma_1^2(\mathbf{y}_1)+\alpha_2\sigma_2\sigma_1(\mathbf{y}_1)+\cdots+\alpha_m\sigma_m\sigma_1(\mathbf{y}_1)\\
&= \alpha_1\sigma_1(\mathbf{y}_1) \quad (\text{正交等方})\\
&= \alpha_1\mathbf{x}_1.
\end{aligned}$$

于是, α_1 是 $\mathcal{A}$ 的特征值 且 $\mathbf{x}_1 \in V^{\alpha_1}$. 但 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 全部的特征值. 故不妨设 $\alpha_1=\lambda_1$. 由此得出 $\mathrm{im}(\sigma_1)\subset V^{\lambda_1}$. 类似地, 适当调整下标后我们可证 $\alpha_i=\lambda_i$ 且 $\mathrm{im}(\sigma_i)\subset V^{\lambda_i}$, $i=2,3,\ldots,m$. 特别地, $m\le k$. 由 (1), (2) 和上述包含关系得出

$$\begin{array}{ccccccccccc}
V & = & V^{\lambda_1} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_m} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_k}\\
 & & \bigcup & & \cdots & & \bigcup & & & & \\
V & = & \mathrm{im}(\sigma_1) & \oplus & \cdots & \oplus & \mathrm{im}(\sigma_m) & & & &
\end{array}.$$

由此得出 $k=m$. 即

$$\begin{array}{ccccccc}
V & = & V^{\lambda_1} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_k}\\
 & & \bigcup & & \cdots & & \bigcup\\
V & = & \mathrm{im}(\sigma_1) & \oplus & \cdots & \oplus & \mathrm{im}(\sigma_k)
\end{array}. \qquad (3)$$

根据第一章第二讲命题 4.16, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc}
\dim(V) & = & \dim(V^{\lambda_1}) & + & \cdots & + & \dim(V^{\lambda_k}) \\
 & & \bigvee\| & & \cdots & & \bigvee\| \\
\dim(V) & = & \dim(\mathrm{im}(\sigma_1)) & + & \cdots & + & \dim(\mathrm{im}(\sigma_k))
\end{array}.$$

于是,

$$\begin{array}{ccccccc}
\dim(V) & = & \dim(V^{\lambda_1}) & + & \cdots & + & \dim(V^{\lambda_k}) \\
 & & \| & & \cdots & & \| \\
\dim(V) & = & \dim(\mathrm{im}(\sigma_1)) & + & \cdots & + & \dim(\mathrm{im}(\sigma_k))
\end{array}.$$

由 (3) 得出

$$\begin{array}{ccccccc}
V & = & V^{\lambda_1} & \oplus & \cdots & \oplus & V^{\lambda_k} \\
 & & \| & & \cdots & & \| \\
V & = & \mathrm{im}(\sigma_1) & \oplus & \cdots & \oplus & \mathrm{im}(\sigma_k)
\end{array}.$$

我们证明了 $k = m, \alpha_i = \lambda_i$, $\sigma_i = \pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 唯一性成立.

(ii) 对 $i = 1, 2, \ldots, k$, 设

$$f_i(t) = \frac{(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_{i-1})(t - \lambda_{i+1}) \cdots (t - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_k)} \in F[t].$$

则 $f_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. 设

$$g(t) = g_d t^d + \cdots + g_1 t + g_0 \in F[t],$$

其中 $g_0, g_1, \ldots, g_d \in F$.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{A}) &= \sum_{i=0}^{d} g_i \mathcal{A}^i \\
&= \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1 \pi_1 + \cdots \lambda_k \pi_k)^i \\
&= \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1^i \pi_1 + \cdots + \lambda_k^i \pi_k) \quad (\text{引理 } 9.4) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_1^i \right) \pi_1 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_k^i \right) \pi_k \\
&= g(\lambda_1)\pi_1 + \cdots + g(\lambda_k)\pi_k.
\end{aligned}$$

特别地, 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$f_i(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{f_i(\lambda_j)}_{\delta_{i,j}} \pi_j = \pi_i. \quad \square$$

注解 9.6 由上述定理可知, π_i 和与 $\mathcal{A}$ 交换的线性算子都是交换的.

9.2 (半)正定算子和平方根定理

定义 9.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \geq 0$. 则称 $\mathcal{A}$ 是半正定算子. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) > 0$. 则称 $\mathcal{A}$ 是正定算子.

命题 9.8 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 对称. 则 $\mathcal{A}$ *(半)*正定当且仅当它在 V 的单位正交基下的矩阵*(半)*正定.

证明. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的单位正交基, A 是 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵, $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{x}))=(x_1,\ldots x_n)A(x_1,\ldots,x_n)^t.$$

于是, $\mathcal{A}$ (半)正定当且仅当 A (半)正定. □

定理 9.9 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是半正定算子. 则存在唯一的半正定算子 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}^2=\mathcal{A}$ 且 $\mathcal{B}\in\mathbb{R}[\mathcal{A}]$.

证明. 因为 $\mathcal{A}$ 是半正定的, 所以它是对称的. 由第三章第三讲定理 6.1, $\mathcal{A}$ 可对角化. 根据谱分解定理

$$\mathcal{A}=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k,$$

其中, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有两两不同的特征根, $\pi_1,\ldots,\pi_k$ 分别是 V 到 $V^{\lambda_1},\ldots,V^{\lambda_k}$ 关于特征子空间直和分解的投影. 因为 $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$, 所以 $\pi_1,\ldots,\pi_k$ 是完全正交等方组. 因为 $\mathcal{A}$ 半正定, 所以 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 都是非负的(见第三章第三讲推论 6.11). 令 $\mathcal{B}=\sqrt{\lambda_1}\pi_1+\cdots+\sqrt{\lambda_k}\pi_k.$, 利用正交等方组的性质可知:

$$\mathcal{B}^2=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\pi_i=\mathcal{A}.$$

下面验证 $\mathcal{B}$ 是半正定算子. 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 设 $\mathbf{v}_i \in V^{\lambda_i}$. 则

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}_i) = \sqrt{\lambda_1}\pi_1(\mathbf{v}_i) + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\pi_k(\mathbf{v}_i) = \sqrt{\lambda_i}\mathbf{v}_i. \qquad (4)$$

设 B_i 是 V_i^{λ} 的一组单位正交基. 由第三章第三讲命题 5.1, $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ 是 V 的单位正交基. 根据 (4), $\mathcal{B}$ 在该基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_1}}_{\dim(V^{\lambda_1})}, \ldots, \underbrace{\sqrt{\lambda_k}, \ldots, \sqrt{\lambda_k}}_{\dim(V^{\lambda_k})}).$$

根据第三章第三讲定理 6.1 和推论 6.11, $\mathcal{B}$ 是半正定算子.

根据谱分解定理 $\pi_1, \ldots, \pi_k \in \mathbb{R}[\mathcal{A}]$. 于是, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}[\mathcal{A}]$. 存在性成立.

设 $\mathcal{C}$ 是半正定算子满足 $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$. 则 $\mathcal{C}$ 可对角化. 根据谱分解定理, 存在两两不同的非负实数 $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ 和完全正交等方组 $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$. 使得 $\mathcal{C} = \mu_1\sigma_1 + \cdots + \mu_\ell\sigma_\ell$. 于是

$$\mathcal{A} = \mu_1^2\sigma_1 + \cdots + \mu_\ell^2\sigma_\ell = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_k\pi_k.$$

由谱分解的唯一性, 我们有, $\ell = k$ 且适当调整下标后 $\mu_i^2 = \lambda_i$ 和 $\sigma_i = \pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 于是, $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, 从而, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. $\square$.

推论 9.10 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 半正定. 则存在唯一的半正定矩阵 B 使得 $A = B^2$ 且 $B \in \mathbb{R}[A]$.

证明. 把 A 看成标准欧式空间上的线性算子即可. □

例 9.11 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定. 证明: AB 的特征根都是实数.

证明. 由推论 9.10, 存在正定矩阵 C 使得 $A = C^2$. 于是,

$$AB = C^2B = CC^{-1}C^2BCC^{-1} = C(CBC)C^{-1}.$$

于是, $AB \sim_s CBC$. 因为 B, C 是对称矩阵, 所以 CBC 也是对称的(直接验证). 根据第三章第三讲定理 6.1, CBC 的特征根都是实数. 因为 $AB \sim_s CBC$, 所以 AB 的特征根都是实数(特征根是相似不变量). □

9.3 极化分解

定理 9.12 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 则存在唯一的正定矩阵 S 和正交矩阵 T 使得 $A = ST$.

证明. 设 $B = AA^t$. 根据推论 9.10, 存在正定矩阵 S 使得 $B = S^2$. 设 $T = S^{-1}A$. 下面验证 T 正交. 注意到 S 是对称矩阵. 我们有

$$\begin{aligned} T^tT &= (S^{-1}A)^t(S^{-1}A) = A^t(S^{-1})^tS^{-1}A \\ &= A^tS^{-1}S^{-1}A = A^tS^{-2}A = A^tB^{-1}A \\ &= A^t(A^t)^{-1}A^{-1}A = E. \end{aligned}$$

存在性成立.

设 S' 正定, T' 正交使得 $A = S'T' = ST$. 则

$$AA^t = S'T'(S'T')^t = S'T'(T')^t(S')^t = S'(S')^t = (S')^2.$$

推论 9.10 蕴含 $S = S'$, 从而 $T = T'$. $\square$.

注解 9.13 利用矩阵转置, 上述定理也可以叙述为:

设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 则存在唯一的正定矩阵 M 和 正交矩阵 N 使得 $A = NM$.

例 9.14 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A = ST$, 其中 S 正定, T 正交. 证明: A 正规当且仅当 $ST = TS$.

证明. 设 $ST = TS$. 则 $AA^t = S^2$ 且

$$A^tA = T^tS^tST = T^tS^2T = T^tTS^2 = S^2.$$

故 $AA^t = A^tA$. 于是, A 正规.

反之, 设 $A^tA = AA^t$. 则

$$T^tS^tST = S^2 \Longrightarrow S^2T = TS^2.$$

根据平方根定理蕴含 $S \in \mathbb{R}[S^2]$, 于是 $S^2T = TS^2$ 蕴含 $ST = TS$. $\square$

推论 9.15 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆. 则存在唯一的正定算子 $\mathcal{S}$ 和 正交算子 $\mathcal{T}$ 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{T}$.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组单位正交基下的矩阵是 A. 则 A 正定. 于是, 存在唯一的正定矩阵 S 和正交矩阵 T 使得 $A = ST$. 令 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别是 V 上在上述单位正交基下矩阵为 S 和 T 的线性算子. 则 $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{T}$. □

10 Hermitian 空间简介

回忆: $\mathbb{C} = \{x + y\sqrt{-1} | x, y \in \mathbb{R}\}$. 设 $z = x + y\sqrt{-1}$. 则 $\bar{z} = x - y\sqrt{-1}$ 是 z 的共轭.

1. 共轭映射 $^{-}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是自同构;
2. 设 $z \in \mathbb{C}$. 则 $z\bar{z}$ 是非负实数; $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$;
3. 设 $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, $z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_k\bar{z}_k \geq 0$; 且

$$z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_k\bar{z}_k = 0 \iff z_1 = \cdots = z_k = 0.$$

4. 设 $f \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$. 则 f 是 $\mathbb{C}[t]$ 中一次多项式的乘积.

记号. 在本节中 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间.

10.1 半双线性型

定义 10.1 设 $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 我们有

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

和

$$f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \bar{\alpha} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{\beta} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

则称 f 是 V 上的半双线性型.

设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 矩阵 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n}$ 称为 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n)A(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)^t.$$

验证:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i, \mathbf{y}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\bar{y}_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\
&= (x_1, \ldots x_n)A\begin{pmatrix}\bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, 则半双线性型 f 称为是 *Hermitian* 型的.

对 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, A 的共轭转置 是指矩阵 $\bar{A}^t$, 其中 $\bar{A}$ 是把 A 中元素都取共轭得到的矩阵. 记 A 的共轭转置为 A^*. 如果 $A = A^*$, 则称 A 是 *Hermitian* 型的.

命题 10.2 *设 f 是 V 上半双线性型, 矩阵 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n}$ f 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是 Hermitian 型的当且仅当 A 是 Hermitian 型.*

证明. 设 f 是 Hermitian 的. 则

$$A^* = (\overline{f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)}) = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)) = A.$$

故 A 是 Hermitian 的.

反之, 设 A 是 Hermitian 的. 则对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\begin{aligned}
\overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} &= \overline{(x_1, \ldots, x_n) A (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)^t} \\
&= \overline{(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) A^t (x_1, \ldots, x_n)^t} \\
&= (y_1, \ldots, y_n) A^* (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^t \\
&= f(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad \square
\end{aligned}$$

注解 10.3 *设 f 是 Hermitian 半双线性型. 则*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

于是, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

定义 10.4 设 f 是 *Hermitian* 半双线性型. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, 则称 f 是正定的. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是 *Hermitian* 型.

如果对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 我们有 $\mathbf{x}^t A \bar{\mathbf{x}} > 0$. 则称 A 是正定的.

命题 10.5 设 f 是半双线性型, $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}$ 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是正定的当且仅当 A 是正定的.

10.2 Hermitian 空间

设 f 是 V 上的正定半双线性型. 则 (V, f) 称为 *Hermitian* 空间或 酉空间. 通常把 f 记为 $(\,|\,)$. 我们有

1. 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$,

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|z) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{z})$$

   和

$$(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta z) = \bar{\alpha}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}|\mathbf{z});$$

2. $\overline{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$;

3. $(\mathbf{x}|\mathbf{x})$ 是非负实数 且 $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. 定义

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) = ((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{m \times m}.$$

称之为 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m$ 的 *Gram* 矩阵. 矩阵 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m)$ 是 Hermitian 的.

命题 10.6 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\in V$. 则 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当

$$\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m))<m.$$

例 10.7 在 $\mathbb{C}^n$ 中, 对任意 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^t$ 和 $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)^t$, 定义

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=\mathbf{x}^t\bar{\mathbf{y}}=x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n.$$

则 $\mathbb{C}^n$ 是 *Hermitian* 空间.

设 V 是 Hermitian 空间.

定义 10.8 设 $\mathbf{x}\in V$. 称 $\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$ 是 $\mathbf{x}$ 的长度, 记为 $\|\mathbf{x}\|$. 再设 $\mathbf{y}\in V$. 则 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 称为 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 之间的距离.

定理 10.9 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 则 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|\le\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ *(Cauchy-Bunyakovski* 不等式*)*. 特别地, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 线性相关.

设 $\mathbf{x}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$. 如果 $\|\mathbf{x}\|=1$, 则称 $\mathbf{x}$ 是单位向量.

定义 10.10 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 如果 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=0$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 正交, 记为 $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$.

零向量与任何向量都正交.

引理 10.11 设 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$, 其中 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 非零.

(i) $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) 如果 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 两两正交, 则它们线性无关.

10.3 单位正交基

设 $\dim(V) = n$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 中两两正交的单位向量. 根据引理 10.11, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 称为 V 的一组单位正交基.

定理 10.12 *(Gram-Schmidt 正交化)* 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ 线性无关. 则存在两两正交的单位向量 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_i \rangle,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. 特别地, V 有单位正交基.

注解 10.13 设 V 是 *Hermitian* 空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. 令

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \quad 和 \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n.$$

则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n.$$

10.4 正交补

定义 10.14 设 $U_1, U_2 \subset V$ 是子空间. 如果对于任意的 $\mathbf{u}_1 \in U_1$ 和 $\mathbf{u}_2 \in U_2$ 我们有 $u_1 \perp u_2$, 则称子空间 U_1 和 U_2 正交, 记为 $U_1 \perp U_2$.

定理 10.15 设 $U \subset V$ 是子空间. 定义

$$U^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V \mid \forall \mathbf{u} \in U, \, \mathbf{u} \perp \mathbf{x}\}.$$

则

(i) $U^{\perp}$ 是子空间且 $U \perp U^{\perp}$;

(ii) $V = U \oplus U^{\perp}$ (称 $U^{\perp}$ 是 U 的正交补).

(iii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

推论 10.16 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 V 中的单位正交向量. 则 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 可扩充为 V 的一组单位正交基.

11 U-矩阵与 U-等价

记号: 在本节中 V 是 n 维 Hermitian 空间, 其中 $n > 0$.

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P.$$

则对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 我们有

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i|\epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(i)}|(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t\overline{\vec{P}^{(j)}}.$$

由此得出 $P^t\bar{P} = E$, 进而 $P^*P = E$.

定义 11.1 设 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 如果 $P^* = P^{-1}$, 则称 P 是 U-矩阵. 所有 n 阶 U-矩阵的集合记为 $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

命题 11.2 集合 $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的子群.

例 11.3 设 $M = A + B\sqrt{-1}$, 其中 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 M 是 U-矩阵当且仅当 A^tB 对称 且 $A^tA + B^tB = E$.
证明. 直接计算得

$$M^*M = (A^t - B^t\sqrt{-1})(A + B\sqrt{-1}) = (A^tA + B^tB) + (A^tB - B^tA)\sqrt{-1}.$$

故 $M^*M = E$ 当且仅当 $A^tA + B^tB = E$ 和 $A^tB = B^tA$. □

命题 11.4 设 *Hermitian* 空间 V 有基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P.$$

再设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基当且仅当 $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

定义 11.5 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 如果存在 $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 是 U-等价(U-相似)的, 记为 $A \sim_u B$.

问题. 给定 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 求它在 U 等价下的标准型. 给定 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 判定它们是否 U-等价.

12 正规算子与正规矩阵

记号*:* 在本节中 V 是 n 维 Hermitian 空间, 其中 $n > 0$.

定义 12.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果算子 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

命题 12.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A, 则其伴随算子在该基下的矩阵等于 A^*.

我们把 $\mathcal{A}$ 的伴随算子记为 $\mathcal{A}^*$.

定义 12.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 类似地, 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 如果 $AA^* = A^*A$, 则称 A 是正规矩阵.

命题 12.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ 正规当且仅当 A 正规.

定义 12.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 Hermitian 算子. 如果 $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是斜 Hermitian 算子.

Hermitian 和斜 Hermitian 算子都是正规算子. 显然, Hermitian 和斜 Hermitian 矩阵($A^* = -A$)都是正规矩阵.

命题 12.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ *(斜) Hermitian* 算子当且仅当 A *(斜) Hermitian* 矩阵.

定义 12.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内*(*积*)*的.

命题 12.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 保内;

(ii) $A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$;

(iii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ *(*保长*)*;

(iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ *(*保距*)*.

注解 12.9 保内算子也称为 U-算子.

13 正规矩阵的标准型

引理 13.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 如果 $\mathrm{tr}(A^*A) = 0$, 则 $A = O$.

引理 13.2 设

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k)\times k} & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \text{其中 } B \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}).$$

如果 A 正规, 则 $C = O_{k\times(n-k)}$.

引理 13.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子, $W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则

(i) $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间;

(ii) $\mathcal{A}_W$ 也是正规算子.

引理 13.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 有一维 $\mathcal{A}$-不变子空间.

定理 13.5 设 $\mathcal{A} \in V$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下是对角阵.

推论 13.6 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 正规. 则存在 A 与某个对角矩阵 U-相似.

定理 13.7 *(i)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ *Hermitian*. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(ii) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *Hermitian.* 则 $A \sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(iii) 特别地, *Hermitian* 矩阵和 *Hermitian* 算子的特征根都是实数.

证明. 这里只证明 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. 因为 A Hermitian 且 $A \sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 也是 Hermitian 的. 由此可知,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^* &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\
&\Rightarrow \bar{\lambda}_1 = \lambda_1, \ldots, \bar{\lambda}_n = \lambda_n \\
&\Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}
$$

定理 13.8 *(i)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 斜 *Hermitian.* 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是零或纯虚数不必两两不同.

(ii) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 斜 *Hermitian.* 则 $A \sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是零或纯虚数不必两两不同.

(iii) 特别地, 斜 *Hermitian* 矩阵和斜 *Hermitian* 算子的特征根都是零或纯虚数.

证明. 这里只证明 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是零或者纯虚数. 因为 A 是斜 Hermitian 且 $A \sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

也是斜 Hermitian 的. 由此可知,

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^* &= -\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\\ &\Rightarrow \bar{\lambda}_1=-\lambda_1,\ldots,\bar{\lambda}_n=-\lambda_n\\ &\Rightarrow \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\{y\sqrt{-1}\,|\,y\in\mathbb{R}\}. \quad\square\end{aligned}$$

定理 13.9 *(i)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是 U-算子. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 的复数模长等于 *1*.

(ii) 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是 U-矩阵. 则 $A\sim_u\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 的复数模长等于 *1.*.

(iii) 特别地, U-矩阵和 U-算子的特征根的复数模长都等于 *1*.

证明. 这里只证明 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是的模长等于 1. 因为 A 是 U 矩阵且 $A\sim_u\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 所以 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 也是 U 矩阵. 由此可知,

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^* &= \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1})\\ &\Rightarrow \bar{\lambda}_1=\lambda_1^{-1},\ldots,\bar{\lambda}_n=\lambda_n^{-1}\\ &\Rightarrow |\lambda_1|=\cdots=|\lambda_n|=1. \quad\square\end{aligned}$$

14 正定算子

定义 14.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是 *Hermitian* 算子. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) > 0$. 则称 $\mathcal{A}$ 是正定算子.

命题 14.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 正定当且仅当它在 V 的单位正交基下的矩阵正定.

命题 14.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 正定当且仅当它的特征根都是正实数.

证明. 因为 $\mathcal{A}$ 是 Hermitian 的, 所以存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 且 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. 特别地, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

如果 $\mathcal{A}$ 是正定的, 则

$$(\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_i) > 0 \Longrightarrow (\lambda_i \mathbf{e}_i|\mathbf{e}_i) > 0 \Longrightarrow \lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

反之, 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \neq \mathbf{0}$. 则

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mathbf{e}_i | \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \bar{x}_i > 0.$$

故 $\mathcal{A}$ 是正定算子. □

定理 14.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是半正定算子. 则存在唯一的半正定算子 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{B} \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$.

推论 14.5 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 半正定. 则存在唯一的半正定矩阵 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = B^2$ 且 $B \in \mathbb{C}[A]$.

定理 14.6 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 可逆. 则存在唯一的正定矩阵 S 和 U-矩阵 T 使得 $A = ST$.

推论 14.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆. 则存在唯一的正定算子 $\mathcal{S}$ 和 U-算子 $\mathcal{T}$ 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{T}$.