中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (期末A卷)

任课教师：李子明、高艺漫、郑晓鹏

注意事项：

1. 考试时间为180 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设有限域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. 计算线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{1} \\ x_1 + x_3 = \bar{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \bar{0} \end{cases}$

在 $\mathbb{Z}_3^4$ 中的所有解的个数.

解. 设

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix}.$$

则上述方程组是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 由高斯消去法可知

$$(A|\mathbf{b}) \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|\mathbf{b}) = 2$. 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 且解流形的维数等于 $4 - 2 = 2$. 于是, 该方程组共有 $3^2 = 9$ 个解.

2. (10分) 设实矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 计算 A^{-1}, $\det(A)$ 和伴随矩阵 $A^{\vee}$.

解. 利用初等行变换得

$$(A|E) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

到此, 我们只用了第二类初等行变换, 故 $\det(A) = -3$.

继续做初等行变换得

$$(A|E) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

因为 $A^{\vee} = |A|A^{-1}$, 所以

$$A^{\vee} = -3 \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (10分) 设 $f = x^3 + 2x^2$ 和 $g = 2x^2 + 3$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式. 计算 $\mathrm{quo}(f, g, x)$, $\mathrm{rem}(f, g, x)$ 和 $h(A)$, 其中 $h = fg$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解. 直接计算得 $\mathrm{quo}(f, g, x) = \frac{1}{2}x + 1$, $\mathrm{rem}(f, g, x) = -\frac{3}{2}x - 3$.

利用赋值同态得:

$$h(A) = f(A)g(A) = (A^3 + 2A^2)(2A^2 + 3E) = A^2(A + 2E)(2A^2 + 3E).$$

因为 $A^2 = -E$, 所以

$$h(A) = -(A + 2E) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. (10分) 设 $F = \left\{ x + y\sqrt{3} \,|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$. 验证 F 是实数域 $\mathbb{R}$ 的子域.

证. 先验证 $(F, +, 0)$ 是加法群. 设 $u_i = x_i + y_i\sqrt{3}$, $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$. 则 $u_1 - u_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\sqrt{3} \in F$. 故 $(F, +, 0)$ 是 $(\mathbb{R}, +, 0)$ 的子群.

验证乘法封闭, $u_1u_2 = (x_1x_2 + 3y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{3} \in F$. 显然 $1 \in F$. 故 F 是 $\mathbb{R}$ 的子环.

最后验证 F 是域. 因为 $\sqrt{3}$ 是无理数, 所以对任意 $x, y \in \mathbb{Q}$, $u = x \pm y\sqrt{3} \neq 0$ 当且仅当 x 或 y 不等于 0. 此时

$$u^{-1} = \frac{1}{x + y\sqrt{3}} = \frac{x - y\sqrt{3}}{x^2 - 3y^2} \in F. \quad \square$$

5. (10分) 设 $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, x \in \mathbb{R}$ 且 $a_n \neq 0$. 令 $(n+1) \times (n+1)$ 的方阵

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}.$$

计算 $\det(A_n)$, 并证明当 x 足够大时, A_n 可逆.

解: 当 $n = 1$ 时, $\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_0 & x \end{pmatrix} = a_1x + a_0$.

当 $n = 2$ 时,

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} a_2 & -1 & 0 \\ a_1 & x & -1 \\ a_0 & 0 & x \end{pmatrix} = a_0 + x(a_2x + a_1) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

断言

$$\det(A_n) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

当 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时断言成立. 设 $n > 2$ 且

$$\det(A_{n-1}) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

对 $\det(A_n)$ 按第一行展开得

$$\det(A_n) = a_nx^n + \det(A_{n-1}) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

因为 $a_n \neq 0$, 所以当 x 足够大时, $\det(A_n) \neq 0$. 故 A_n 可逆. $\square$

6. (10分)

(i) 列出加法群 $(\mathbb{Z}_{12},+,\bar{0})$ 中所有互不相同的子群, 并说明不重不漏.

(ii) 设 U 是环 $(\mathbb{Z}_{12},+,\bar{0},\cdot,\bar{1})$ 中所有可逆元的集合. 问乘法群 $(U,\cdot,\bar{1})$ 是不是循环群? 请说明理由.

解. *(i)* 加法群 $(\mathbb{Z}_{12},+,\bar{0})$ 中所有互不相同的子群是, 一阶群 $\langle\bar{0}\rangle$, 二阶群 $\langle\bar{6}\rangle$ 三阶群 $\langle\bar{4}\rangle$, 四阶群 $\langle\bar{3}\rangle$, 六阶群 $\langle\bar{2}\rangle$, 和 $\mathbb{Z}_{12}$.

因为 $\mathbb{Z}_{12}$ 是循环群, 而循环群的子群也是循环群, 而对 12 的每个因子 s, 只有一个 s 阶循环群. 故上述子群就是 $\mathbb{Z}_{12}$ 的所有子群.

(ii) 群 $U=\{\bar{1},\bar{5},\bar{7},\overline{11}\}$. 如果 U 是循环群, 则 U 中有一个元素的阶等于 4. 但 U 中元素的阶都不大于 2. 故 U 不是循环群.

7. (10分) 设 $A=(a_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$, 其中 $a_{i,j}\in\mathbb{Z}$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 再设 p 是素数, $\pi_p:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}_p$ 是商映射, 和 $A_p=(\pi_p(a_{i,j}))\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$. 证明:

(i) $\pi_p(\det(A))=\det(A_p)$,

(ii) $\mathrm{rank}(A)\geq\mathrm{rank}(A_p)$ 且只存在有限多个素数 p, 使得 $\mathrm{rank}(A)>\mathrm{rank}(A_p)$.

证明. *(i)* 因为 π_p 是环同态, 所以

$$
\begin{aligned}
\pi_p(\det(A)) &= \pi_p\left(\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma\pi_p(a_{1,\sigma(1)})\cdots\pi_p(a_{n,\sigma(n)})\\
&= \det(A_p).
\end{aligned}
$$

(ii) 设 $r=\mathrm{rank}(A)$. 如果 $r=n$, 则不等式显然成立. 设 $r<n$. 则 A 中所有大于 r 阶子式都等于零. 由 *(i)* 和 π_p 是环同态可知, A_p 中的所有大于 r 阶的子式都等于零. 故 $\mathrm{rank}(A_p)\leq r$.

注意到 A 的所有 r 阶非零子式都是整数. 故只有有限多个素数 p 使得这些子式在 $\mathbb{Z}_p$ 中的剩余类为 $\bar{0}$. 这些素数就是这些非零子式的最大公因子的素因子. 除去这些素数外, A_p 中至少有一个 r 阶子式非零. 对于这样的素数, $\mathrm{rank}(A_p)=r$. □

8. (10分) 设 F 是域, 矩阵 $A\in F^{m\times n}$, 且 E_m 代表 m 阶单位方阵. 证明:

(i) $\operatorname{rank}(A) = m$ 当且仅当存在矩阵 $B \in F^{n\times m}$ 使得 $AB = E_m$;

(ii) $\operatorname{rank}(A) = m$ 和 $m < n$ 当且仅当存在矩阵 $B, C \in F^{n\times m}$ 使得

$$AB = E_m, \quad AC = E_m, \quad \text{和} \quad B \neq C.$$

证明. *(i)* 设 $AB{=}E_m$. 则 $\operatorname{rank}(A){\geq}m$. 因为 A 只有 m 行, 所以 $\operatorname{rank}(A){=}m$.

反之, 设 $\operatorname{rank}(A) = m$. 考虑方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, 其中, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $\mathbf{e}_i$ 是 E_m 的第 i 个列向量, $i = 1, 2, \ldots, m$. 因为 $\operatorname{rank}(A) = m$, 所以增广矩阵 $(A|\mathbf{e}_i)$ 的秩等于 m. 于是, 上述方程组有解 $\mathbf{b}_i = (b_{1,i}, \ldots, b_{n,i})^t$. 令 $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)$. 则 $AB = (A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_m) = E_m$.

(ii) 设存在矩阵 $B, C \in F^{n\times m}$ 使得

$$AB = E_m, \quad AC = E_m, \quad \text{和} \quad B \neq C.$$

则 $A(B - C) = O_m$ 且 $B - C \neq O_{n\times m}$. 于是, 齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$ 有非平凡解. 故 $\operatorname{rank}(A) < n$. 由 *(i)* 可知, $\operatorname{rank}(A) = m$. 由此得出 $m < n$.

反之, 设 $\operatorname{rank}(A) = m$ 和 $m < n$. 则方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$ 有非平凡解 $\mathbf{v} \in F^n$. 由 *(i)* 可知存在 $B \in F^{n\times m}$ 使得 $AB = E_m$. 令

$$C = \left(\vec{B}^{(1)} + \mathbf{v}, \vec{B}^{(2)}, \ldots, \vec{B}^{(m)}\right).$$

则 $C \neq B$ 且 $AC = AB = E_m$. □

另解. 直接求解矩阵方程 $AX = E_m$, 其中未知矩阵 $X \in F^{n\times m}$. 根据打洞引理, 存在 $P \in \mathrm{GL}_m(F)$ 和 $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q,$$

其中 $r = \operatorname{rank}(A)$. 故原矩阵方程等价于

$$P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QX = E_m, \quad \text{等价于} \quad \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QX = P^{-1}.$$

令 $Y = QX$. 则 $Y \in F^{n\times m}$. 因为 Q 可逆, 所以原方程有解当且仅当

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Y = P^{-1}. \tag{1}$$

有解.

(i) 如果 B 存在, 则 (1) 有解. 故 $r = m$. 如果 $r = m$, 则 (1) 可写成

$$(E_m, O)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}, \quad Y_1 \in \mathrm{M}_m(F), Y_2 \in F^{(n-m)\times m}. \tag{2}$$

故

$$Y = \begin{pmatrix} P^{-1} \\ M \end{pmatrix},$$

其中 $M \in F^{(n-m)\times m}$ 是任意矩阵. 故 B 存在.

(ii) 如果存在不同的矩阵 B 和 C 使得 $AB = AC = E_m$. 则上述解 Y 中的任意矩阵 M 必然存在. 故 $m < n$. 而 $\mathrm{rank}(A) = m$ 由 *(i)* 直接得出. 如果 $\mathrm{rank}(A) = m$ 且 $m < n$, 则任意矩阵 M 必然存在. 于是, (2) 有至少两个解. 故存在不相等的矩阵 B, C, 使得 $AB = AC = E_m$.

9. (10分) 设 F 是域, $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $AC = CA$. 证明:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

证明. 先设 A 可逆. 则

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -A^{-1}C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -A^{-1}CA + C & -A^{-1}CB + D \end{pmatrix} \overset{CA=AC}{=} \begin{pmatrix} A & B \\ O & -A^{-1}CB + D \end{pmatrix}.$$

故

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} E & O \\ -A^{-1}C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ O & -A^{-1}CB + D \end{pmatrix}$$
$$= \det(A)\det(D - A^{-1}CB) = \det(AD - CB).$$

结论成立.

设 A 不可逆. 令 t 是 F 上的未定元. 则 $tE + A \in \mathrm{M}_n(F(t))$ 且 $\det(tE + A)$ 是关于 t 的 n 次多项式. 故 $tE+A$ 可逆. 由 $(tE + A)C = C(tE + A)$ 和 *(i)* 可知,

$$\det\begin{pmatrix} tE + A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det((tE + A)D - CB).$$

注意到上式是两个关于 t 的多项式相等. 把上式中 t 替换为 0 得

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB). \quad \square$$

10. (10分) 设 $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot, E)$ 是由实数域上 2×2 的可逆矩阵关于矩阵乘法构成的群. 令 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

    (i) 验证: $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot, E)$ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的子群.

    (ii) 证明: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \langle S\rangle$, 其中 S 是所有 2×2 的第二类初等矩阵构成的集合.

证明. *(i)* 设 $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 因为 $\det(B) = 1$, 所以 $\det(B^{-1}) = 1$. 于是,

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = 1 \implies AB^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

由子群判别法可知, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的子群.

(ii) 注意到所有 2×2 阶的第二类初等变换的行列式都等于 1. 它们都是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中的元素. 故 $\langle S\rangle \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 先设 $a \neq 0$. 令

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^{-1}c & 1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 P_1 和 Q_1 都是第二类初等矩阵. 计算

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} =: B.$$

因为 $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 所以 $ah = 1$.

设第二类初等矩阵

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(1-a) & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P_2BQ_2 = (P_2B)Q_2 = \begin{pmatrix} a & h \\ 0 & h \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1-a & h \end{pmatrix} =: C$$

设 $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$. 则利用 $ah = 1$ 得

$$P_3C = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := D.$$

再设 $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $DQ_3 = E$. 综上,

$$P_3P_2P_1AQ_1Q_2Q_3 = E \Longrightarrow A = P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}.$$

则 $A \in \langle S \rangle$.

再考虑 $a = 0$ 的情形. 因为 A 可逆, 所以 $c \neq 0$. 设 $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则上述结论蕴含

$$RA = \begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

由 $a \neq 0$ 情形的讨论可知 $A \in \langle S \rangle$. 我们得到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \langle S \rangle$. □