中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (期末-B卷)

任课教师：李子明、高艺漫、郑晓鹏

注意事项：

1. 考试时间为180 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设有限域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. 计算齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{0} \\ x_1 + x_3 = \bar{0} \\ x_1 + x_2 + \bar{2}x_3 + x_4 = \bar{0} \end{cases}$ 在 $\mathbb{Z}_3^4$ 中的解空间的维数和非平凡解的个数.

解. 设

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

则上述方程组是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由高斯消去法可知

$$A \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rank}(A) = 3.$$

根据对偶定理, 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数等于 $4 - 3 = 1$. 于是, 非平凡解的个数等于 2. □

2. (10分) 设实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 A^{-1} 和 $\det(A^{-1})$.

解. 由初等行变换得:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \det(A) = -4.$$

故

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{4}. \quad \square$$

3. (10分) 设 $f = x^3 + 2x^2$ 和 $g = x^2 - 3$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式. (i) 计算 $\operatorname{quo}(f, g, x)$ 和 $\operatorname{rem}(f, g, x)$. (ii) 设 h 是 f 和 g 的乘积, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 计算 $h(A)$.

解. *(i)* $\operatorname{quo}(f, g, x) = x + 2$, $\operatorname{rem}(f, g, x) = 3x + 6$. *(ii)* 直接计算得

$$h(A) = f(A)g(A) = (A^3 + 2A^2)(A^2 - 3E) = A^2(A + 2E)(A^2 - 3E).$$

因为 $A^2 = E$, 所以

$$h(A) = -2(A + 2E) = -\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \square$$

4. (10分) 设 $F = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. 验证 F 是实数域 $\mathbb{R}$ 的子域.

证. 先验证 $(F, +, 0)$ 是加法群. 设 $u_i = x_i + y_i\sqrt{5}$, $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$. 则 $u_1 - u_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\sqrt{5} \in F$. 故 $(F, +, 0)$ 是 $(\mathbb{R}, +, 0)$ 的子群.

验证乘法封闭, $u_1u_2 = (x_1x_2 + 5y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{5} \in F$. 显然 $1 \in F$. 故 F 是 $\mathbb{R}$ 的子环.

最后验证 F 是域. 因为 $\sqrt{5}$ 是无理数, 所以对任意 $x, y \in \mathbb{Q}$, $u = x + y\sqrt{5} \neq 0$ 当且仅当 x 或 y 不等于 0. 此时

$$u^{-1} = \frac{1}{x + y\sqrt{5}} = \frac{x - y\sqrt{5}}{x^2 - 5y^2} \in F. \quad \square$$

5. (10分) 设 F 是域. 计算 $\det(A_n)$ 的值, 其中:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(F).$$

根据 F 的特征讨论 A_n 何时不可逆.

解: 当 $n=1$ 时, $\det(A_1)=2$. 当 $n=2$ 时

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

$$\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

断言：$\det(A_n) = n+1$.

当 $n=1,2,3$ 时, 断言成立. 设 $n>3$ 且 $4,5,\ldots,n-1$ 时结论成立. 则

$$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) = 2n-(n-1) = n+1.$$

断言成立. 故 $\det(A_n) = n+1$.

如果 $\mathrm{char}(F)=0$, 则矩阵 A_n 可逆. 设 $\mathrm{char}(F)=p>0$, 则 A_n 可逆当且仅当 $p \nmid (n+1)$. □

6. (10分)

(i) 列出加法群 $(\mathbb{Z}_{15}, +, \bar{0})$ 中所有互不相同的子群, 并说明不重不漏.

(ii) 设 U 是环 $(\mathbb{Z}_{15}, +, \bar{0}, \cdot, \bar{1})$ 中所有可逆元的集合. 问乘法群 $(U, \cdot, \bar{1})$ 是不是循环群? 请说明理由.

解. *(i)* 加法群 $(\mathbb{Z}_{15}, +, \bar{0})$ 中所有互不相同的子群是, 一阶群 $\langle\bar{0}\rangle$, 三阶群 $\langle\bar{5}\rangle$ 五阶群 $\langle\bar{3}\rangle$, 和 $\mathbb{Z}_{15}$.

因为 $\mathbb{Z}_{15}$ 是循环群, 而循环群的子群也是循环群, 而对 15 的每个因子 s, 只有一个 s 阶循环群. 故上述子群就是 $\mathbb{Z}_{15}$ 的所有子群.

(ii) 群 $U = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$. 如果 U 是循环群, 则 U 中有一个元素的阶等于 8. 直接计算得

$$\mathrm{ord}(\bar{1}) = 1, \mathrm{ord}(\bar{4}) = \mathrm{ord}(\overline{11}) = \mathrm{ord}(\overline{14}) = 2, \mathrm{ord}(\bar{2}) = \mathrm{ord}(\bar{7}) = \mathrm{ord}(\bar{8}) = \mathrm{ord}(\overline{13}) = 4.$$

故 U 不是循环群.

7. (10分) 设 G 是群, $g \in G$, 和

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \mapsto & g^{-1}xg. \end{array}$$

证明:

(i) ϕ 是群同构,

(ii) 对任意 $x \in G$, $\mathrm{ord}(xg) = \mathrm{ord}(gx)$.

证明. *(i)* 设 $x, y \in G$. 则

$$\phi(xy) = g^{-1}xyg = g^{-1}xgg^{-1}yg = \phi(x)\phi(y).$$

故 ϕ 是群同态.

设 $\phi(x) = \phi(y)$. 则 $g^{-1}xg = g^{-1}yg$. 由群中的左右消去律可知, $x = y$. 故 ϕ 是单射. 设 $h \in G$. 则 $\phi(ghg^{-1}) = h$. 故 ϕ 是满射. 于是, ϕ 是同构.

(ii) 注意到 $\phi(gx) = xg$. 因为 ϕ 是同构, 所以 $\mathrm{ord}(xg) = \mathrm{ord}(gx)$. □

8. (10分) 设 $(R, +, 0_R, \cdot, 1_R)$ 和 $(S, +, 0_S, \cdot, 1_S)$ 是两个环, 且它们的特征都非零. 再设 ϕ 是从 R 到 S 的环同态. 证明:

(i) $\mathrm{char}(S) \mid \mathrm{char}(R)$,

(ii) 如果 R 和 S 都是整环, 则 $\mathrm{char}(R) = \mathrm{char}(S)$.

证明. *(i)* 设 $m = \mathrm{char}(R)$ 和 $n = \mathrm{char}(S)$. 则

$$0_S = \phi(0_R) = \phi(m1_R) = m1_S.$$

因为 $\mathrm{ord}(1_S) = n$, 所以 $n|m$.

(ii) 因为 R 和 S 是整环, 所以 m 和 n 是素数. 故 *(i)* 蕴含 $m = n$. □

9. (10分) 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, 其中 F 是域. 证明: $\mathrm{rank}(A) < n$ 当且仅当存在非零矩阵 $M \in \mathrm{M}_n(F)$, 使得 $MA = AM = O$.

证明. 设 $AM = O$ 且 $M \neq O$. 由 *Sylvester* 秩不等式可知,

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(M) \leq n.$$

因为 $\mathrm{rank}(M) > 0$, 所以 $\mathrm{rank}(A) < n$.

反之, 存在 $f(x) \in F[x]$, 满足 $f \neq 0$, $f(A) = O$. 再设 f 的次数 m 极小. 由多项式求逆的方法可知, A 不可逆蕴含 $f(0) = 0$. 故

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x = x \underbrace{\left(\alpha_m x^{m-1} + \alpha_{m-1} x^{m-2} + \cdots + \alpha_1\right)}_{g},$$

其中 $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_1 \in F$ 且 $\alpha_m \neq 0$. 由 m 的极小性可知, $M = g(A) \neq O$. 因为,

$$f(x) = xg(x) = g(x)x \Rightarrow f(A) = Ag(A) = g(A)A \Rightarrow AM = MA = O. \quad \square$$

10. (10分) 设 K 是域, $C \in \mathrm{GL}_n(K)$, 其中 $\mathrm{GL}_n(K)$ 代表所有 K 上的 n 阶可逆方阵的集合. 设对于任意 $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, $AC = CA$ 成立. 证明:

$$C = \lambda E,$$

其中 λ 是 K 中的非零元素, E 代表 n 阶单位方阵.

证明. 设 $C = (c_{i,j})_{n \times n}$ 和 $F_{i,j}$ 是第一类初等矩阵, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 则 $F_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(K)$. 由 $CF_{i,j} = F_{i,j}C$ 可知, 把 C 两行互换和相应的两列互换得到相同的矩阵. 分别取它们的第 i 行得到:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (c_{j,1}, & \ldots, & c_{j,i}, & \ldots, & c_{j,j} & \ldots, & c_{j,n}) & = & (c_{i,1}, & \ldots, & c_{i,j}, & \ldots, & c_{i,i} & \ldots, & c_{j,n}) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i & & j & & & & & & i & & j & & \end{array}$$

故 $c_{i,i} = c_{j,j}$.

设 $F_{i,j}(1)$ 是第二类初等矩阵, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i \neq j$. 则 $F_{i,j}(1) \in \mathrm{GL}_n(F)$. 因为 $F_{i,j}(1)C = CF_{i,j}(1)$, 所以取这两个矩阵第 i 行第 i 列处的元素得到:

$$c_{i,i} + c_{j,i} = c_{i,i}.$$

故 $c_{j,i} = 0$.

综上所述 C 是可逆的数乘矩阵. $\square$