

中国科学院大学

试题专用纸

课程编号: B01GB003Y-B02

课程名称: 线性代数II-B (A卷答案)

任课教师: 李子明、高艺漫、郑晓鹏

注意事项:

1. 考试时间为180分钟, 考试方式闭卷;
2. 全部答案写在答题纸上;
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设复数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 计算 A 的特征多项式和 Jordan 标准型.

解. 矩阵 A 的特征多项式是 $(t-1)^3$, 且

$$\text{rank}(E - A) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } a \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } a = 0. \end{cases}$$

故特征根 1 的几何重数是 2 如果 $a \neq 0$. 此时

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

否则 $J_A = \text{diag}(1, 1, 1)$. $\square$

2. (10分) 设复数方阵 A 的特征多项式是 $(t-2)^2(t+3)^3$.

- (i) 设 A 的极小多项式是 $(t-2)^2(t+3)^2$. 计算 A 的 Jordan 标准型, 并说明理由.
- (ii) 设 $\text{rank}(A-2E) = 3$ 和 $\text{rank}(A+3E) = 4$. 计算 A 的 Jordan 标准型和极小多项式, 并说明理由.

解. 因为特征多项式的次数等于 5, 所以 A 是 5 阶方阵.

(i) 由极小多项式的具体形式可知, J_A 中关于特征根 2 的最大 *Jordan* 块的阶数是 2. 因为 2 的代数重数也是 2, 所以 J_A 中只有一个关于 2 的 *Jordan* 块. 同理 J_A 中关于特征根 -3 的最大 *Jordan* 块的阶数是 2. 由此得出

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(2) & & \\ & J_2(-3) & \\ & & J_1(-3) \end{pmatrix}.$$

(ii) 特征根 2 的几何重数等于 $5-3=2$. 故 J_A 中有两个关于 2 的约当块. 由于 2 的代数重数等于 1, 所以 J_A 中关于 2 的 *Jordan* 块是 $J_1(2), J_1(2)$. 特征根 -3 的几何重数等于 $5-4=1$. 故 J_A 中有一个关于 -3 *Jordan* 块. 由于 -3 的代数重数等于 3, 所以 J_A 中关于 -3 的 *Jordan* 块是 $J_3(-3)$. 于是,

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(2) & & \\ & J_1(2) & \\ & & J_3(-3) \end{pmatrix}.$$

矩阵 J_A 的极小多项式是 $\text{lcm}(t-2, t-2, (t+3)^3) = (t-2)(t+3)^3$. 因为极小多项式是相似不变量, 所以 $\mu_A = (t-2)(t+3)^3$. $\square$

3. (10分) 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中的子空间 U 是方程 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 的解空间.

(i) 计算 U 的正交补 $U^\perp$ 的一组基.

(ii) 计算 $\mathbb{R}^3$ 的一组单位正交基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, 其中 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ 和 $\mathbf{u}_3 \in U^\perp$.

解. (i) 由 U 的定义方程可知, $U^\perp = \{(1, -1, 1)^t\}$. 故 $U^\perp$ 的一组基是 $(1, -1, 1)^t$.

(ii) 子空间 U 的一组基是 $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)^t$ 和 $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)^t$. 对其应用 *Gram-Schmidt* 正交化如下:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1.$$

$$\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)^t - (1/2, 1/2, 0)^t = (1/2, -1/2, -1)^t.$$

和

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^t.$$

而 $\mathbf{u}_3$ 是 $U^\perp$ 的基 $(1, -1, 1)^t$ 的单位化.

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^t.$$

单位正交基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 即为所求. $\square$

4. (10分) 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

已知 A 的特征多项式等于 $(t-3)(t+1)^3$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $P^tAP = D$.

解. 设 $\lambda_1 = 3$ 和 $\lambda_2 = -1$. 因为 A 可对角化, 所以 V^{λ_2} 的维数是 λ_2 的代数重数. 故 $\dim V^{\lambda_2} = 3$. 由此可知, V^{λ_2} 是矩阵 $E + A$ 的某个非零行对应的齐次线性方程的解空间. 由此可知, V^{λ_2} 是方程 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 的解空间. 于是

$$V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

因为 $\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$ 且 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$. 我们有 $V^{\lambda_1} = (V^{\lambda_2})^\perp$. 故

$$V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

由 Gram-Schmidt 正交化可知,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

进而, $P^tAP = \text{diag}(-1, -1, -1, 3)$. $\square$

5. (10分) 设 $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $A = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$. 计算 A 的极小多项式和 A^{2023} .

解. 直接计算得 $\chi_P = t^2 - 1$ 和 $\chi_Q = t^2 + 1$. 因为 P, Q 都不是对角矩阵, 所以它们的极小多项式的次数都是 2 次. 故 $\mu_P = t^2 - 1$ 和 $\mu_Q = t^2 + 1$. 进而, $\mu_A = t^4 - 1$.

根据 *Hamilton-Cayley* 定理, $P^2 = E$ 且 $Q^2 = -E$. 于是,

$$P^{2023} = P \quad \text{且} \quad Q^{2023} = -Q.$$

故

$$A^{2023} = \begin{pmatrix} P^{2023} & O \\ O & Q^{2023} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & -Q \end{pmatrix}. \quad \square$$

6. (10分) 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的两个线性无关的特征向量. 证明:

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 在同一个特征子空间中.

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 都在 $\mathcal{A}$ 的特征子空间 V^λ 中. 则 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V^\lambda$. 因为 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

设 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量. 则存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. 再设 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1$ 和 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_2$. 则由

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \Rightarrow (\lambda - \lambda_1) \mathbf{v}_1 + (\lambda - \lambda_2) \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关, 所以 $\lambda = \lambda_1$ 且 $\lambda = \lambda_2$. 故 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V^\lambda$. $\square$

7. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子. 证明: $\mathcal{A}$ 在 F 中有 n 个互不相同的特征根当且仅当以下两个条件同时满足

(i) $\mathcal{A}$ 可对角化,

(ii) V 是 $\mathcal{A}$ -循环的.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 有 n 个互不相同的特征根是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. 则 $\mathcal{A}$ 可对角化. 由 *Hamilton-Cayley* 定理 (加强版), $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$. 因为 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$, 所以 V 是 $\mathcal{A}$ -循环的 (循环空间判别法).

设条件 (i) 和 (ii) 成立. 由条件 (i) 和对角化判别法 V , $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_s)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$, 两两互不相同. 由条件 (ii) 和循环空间判别法,

$$\deg \mu_{\mathcal{A}} = n.$$

于是, $s = n$. $\square$

8. (10分) 设 V 是 n 维欧氏空间.

- (i) 设 $n = 2$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 V 的一组单位正交基, 且 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 由 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$ 确定. 证明: $\mathcal{A}$ 可逆且对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \perp \mathcal{A}(\mathbf{x})$.
- (ii) 设 $n = 3$. 请回答是否存在 V 上的可逆线性算子 $\mathcal{B}$ 使得对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \perp \mathcal{B}(\mathbf{x})$? 并说明理由.

证明. (i) 线性算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 A 可逆, 所以 $\mathcal{A}$ 可逆. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{x})) = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2|-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2) = -x_1x_2 + x_2x_1 = 0.$$

故 $\mathbf{x} \perp \mathcal{A}(\mathbf{x})$.

(ii) 不存在.

因为 $\chi_{\mathcal{B}}$ 的次数等于 3, 所以 $\mathcal{B}$ 有实特征根 λ . 因为 $\mathcal{B}$ 可逆, 所以 $\lambda \neq 0$. 设 $\mathbf{v}$ 是 λ 对应的特征向量. 则 $(\mathbf{v}|\mathcal{B}(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}|\lambda\mathbf{v}) = \lambda\|\mathbf{v}\|^2 \neq 0$. $\square$

(ii) 的另证. 设这样的算子 $\mathcal{B}$ 存在. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 V 的一组单位正交基, $\mathcal{B}$ 在该基下的矩阵是 $B = (b_{i,j}) \in M_3(\mathbb{R})$. 因为 $b_{i,j} = (\mathbf{e}_i|\mathcal{B}(\mathbf{e}_j))$, 所以

$$b_{i,i} = (\mathbf{e}_i|\mathcal{B}(\mathbf{e}_i)) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

由此和计算

$$0 = (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j|\mathcal{B}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i|\mathcal{B}(\mathbf{e}_j)) + (\mathbf{e}_j|\mathcal{B}(\mathbf{e}_i)) = b_{i,j} + b_{j,i},$$

可知 B 是斜对称的. 但三阶斜对称矩阵不可逆. 矛盾.

9. (10分)

- (i) 设 P 是 n 阶正交矩阵. 证明: $-n \leq \text{tr}(P) \leq n$.
- (ii) 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 都正定. 证明: 如果 $A - B$ 正定, 则 $B^{-1} - A^{-1}$ 正定.

证明. (i) P 相似于

$$Q = \begin{pmatrix} N(\cos \theta_1, \sin \theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\cos \theta_s, \sin \theta_s) & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n \in \{-1, 1\}$. 因为 $P \sim_s Q$, 所以 $\operatorname{tr}(P) = \operatorname{tr}(Q)$. 因为 Q 的对角线上的元素的绝对值都不大于 1, 所以 $-n \leq \operatorname{tr}(Q) \leq n$.

另证: 因为 P 的列向量都是单位向量, 所以 P 中每个元素的绝对值不大于 1. 由此可知 $|\operatorname{tr}(P)| \leq n$.

(ii) 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 P 使得

$$E = P^t A P \quad \text{且} \quad D = P^t B P,$$

其中 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 因为 B 正定, 所以 D 正定. 故 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$. 因为 $A - B$ 正定, 所以 $E - D$ 正定. 由此得出,

$$1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} - 1, \dots, \frac{1}{\lambda_n} - 1 \in \mathbb{R}^+.$$

于是, $D^{-1} - E$ 正定. 因为

$$D^{-1} - E = P^{-1}(B^{-1} - A^{-1})(P^{-1})^t \Rightarrow D^{-1} - E \sim_c B^{-1} - A^{-1}.$$

所以 $B^{-1} - A^{-1}$ 正定. $\square$

10. (10分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 它的特征多项式是 $(t - \lambda_1)^{d_1} \cdots (t - \lambda_s)^{d_s}$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ 两两不同, $d_1, \dots, d_s$ 是正整数. 再设 k 是一个大于 1 的正整数.

(i) 证明: A^k 的特征多项式是 $(t - \lambda_1^k)^{d_1} \cdots (t - \lambda_s^k)^{d_s}$.

(ii) 再设 A 与 A^k 相似. 证明: A 的非零特征值都是单位根, 这里单位根是指满足方程 $z^m = 1$ 的复数, 其中 m 是某个正整数.

证明. (i) 因为 λ_i 的代数重数是 d_i , $i = 1, \dots, s$. 则 J_A 是上三角矩阵且在 diagonal 上 λ_i 出现的次数是 d_i . 则不妨设, J_A 的对角线是

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{d_s}.$$

因为 J_A 是上三角的, 所以 J_A^k 的对角线是

$$\underbrace{\lambda_1^k, \dots, \lambda_1^k}_{d_1}, \dots, \underbrace{\lambda_s^k, \dots, \lambda_s^k}_{d_s}.$$

故 J_A^k 的特征多项式等于 $(t - \lambda_1^k)^{d_1} \dots (t - \lambda_s^k)^{d_s}$. 因为 A^k 与 J_A^k 相似, 所以 A^k 的特征多项式等于

$$(t - \lambda_1^k)^{d_1} \dots (t - \lambda_s^k)^{d_s}.$$

(注: J_A 可以用复方阵相似的上三角矩阵取代.)

(ii) 由 (i) 和 $A \sim_s A^k$ 可知, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_s^k\}$. 故 $\lambda_1^k, \dots, \lambda_s^k$ 是 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ 的一个置换. 不妨设

$$\lambda_1^k = \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_s^k = \lambda_{i_s},$$

其对应的置换是 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_s \end{pmatrix}$. 设 $\lambda_1 \neq 0$. 因为每个置换是若干互不相交的循环之积. 不妨设 $(1, j_1, \dots, j_\ell)$ 是 σ 的互不相交循环分解中的一个循环. 则 $\lambda_1^k = \lambda_{j_1}, \lambda_{j_1}^k = \lambda_{j_2}, \dots, \lambda_{j_{\ell-1}}^k = \lambda_{j_\ell}, \lambda_{j_\ell}^k = \lambda_1$. 由此可知 $\lambda_1^{(\ell+1)k} = \lambda_1$. 因为 $\lambda_1 \neq 0$, 所以 $\lambda_1^{(\ell+1)k-1} = 1$. 又因为 $(\ell+1)k-1 > 0$, 所以 λ_1 是单位根. 对其它非零特征根可类似证明. $\square$