# 中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (期中试卷)

任课教师：李子明、高艺漫、郑晓鹏

注意事项：

**1.** 考试时间为**120** 分钟，考试方式闭卷；

**2.** 全部答案写在答题纸上；

**3.** 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) (5分) 把 $\sigma$ 写成互不相交的循环之积.

(ii) (5分) 计算 $\sigma$ 的阶.

(iii) (5分) 确定 $\sigma$ 的奇偶性.

解. *(i)* $\sigma = (1\underline{10}2)(3798)(45)$.
*(ii)* $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(3,4,2) = 12$.
*(iii)* $\epsilon_\sigma = (-1)^{2+3+1} = 1$. 故 $\sigma$ 是偶置换.

2. (15分) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基, $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ 是线性映射且满足

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + 4\boldsymbol{\epsilon}_2 + 6\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_2) = 3\boldsymbol{\epsilon}_1 + 6\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + 3\boldsymbol{\epsilon}_2 + 5\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_4) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 + 3\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_5) = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_3. \end{cases}$$

(i) 求 $\phi$ 在基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$; $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 下的矩阵;

(ii) 求 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数;

(iii) 计算 $\ker(\phi)$的一组基和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

解. 矩阵表示是

*(i)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*(ii)* 由初等行变换可知

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -12 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

于是, $\operatorname{rank}(A) = 2$. 故 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = 2$. 根据对偶定理, $\dim(\ker(\phi))$=5−2=3.

*(iii)* 因为 $\operatorname{rank}(A) = 2$ 且 $\vec{A}^{(1)}$ 和 $\vec{A}^{(2)}$ 线性无关, 所以 $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}$ 是 $\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基. 由矩阵 $B$ 可知 $\ker(\phi)$ 的一组基是

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. (15分) 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数集, $n$ 是正整数.

(i) (5分) 请回答 $\mathbb{Q}^n$ 是不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间? 并说明理由.

(ii) (10分) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 如果 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n$, 则称 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 有二元关系 $\sim_{\mathbb{Q}}$, 记为 $\mathbf{x} \sim_{\mathbb{Q}} \mathbf{y}$. 请回答 $\sim_{\mathbb{Q}}$ 是不是等价关系? 并说明理由.

解.

*(i)* 不是. 因为 $\sqrt{2}\mathbf{e}_1 \notin \mathbb{Q}^n$, 但 $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{Q}^n$, 所以 $\mathbb{Q}^n$ 对数乘不封闭.

*(ii)* 是. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量. 我们有 $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{Q}^n$. 故 $\mathbf{x} \sim_{\mathbb{Q}} \mathbf{x}$. 自反性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_{\mathbb{Q}} \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n$. 因为有理数的相反数也是有理数, 所以 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$. 故 $\mathbf{y} \sim_{\mathbb{Q}} \mathbf{x}$. 对称性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_{\mathbb{Q}} \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \sim_{\mathbb{Q}} \mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathbb{Q}^n$. 因为两个有理数之和是有理数, 所以

$$\mathbf{x} - \mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \in \mathbb{Q}^n.$$

于是, $\mathbf{x} \sim_{\mathbb{Q}} \mathbf{z}$. 传递性成立. 故 $\sim_{\mathbb{Q}}$ 是等价关系.

4. (15分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算:

(i) (8分) $AB$ 和 $BA$;

(ii) (7分) $\operatorname{rank}(AB)$ 和 $\operatorname{rank}(BA)$.

解. *(i)* 直接计算得

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*(ii)* 由初等列变换可知

$$AB \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(AB) = 2$. 由初等行变换可知

$$BA \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(BA) = 1$.

5. (10分) 设 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $g = \gcd(m, n)$. 证明:

(i) (5分) 对对任意小于 $g$ 的正整数 $k$, 不存在 $x, y \in \mathbb{Z}$ 使得 $xm + yn = k$;

(ii) (5分) 如果 $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 满足 $a|(mn)$ 且 $\gcd(a, m) = 1$, 则 $a|n$.

证明. *(i)* 假设存在 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $um + nv = k$. 因为 $g|m$ 且 $g|n$, 所以 $g|k$. 故 $0 < g \leq k$. 矛盾.

*(ii)* 因为 $\gcd(a,m)=1$, 所以 $am=\mathrm{lcm}(a,m)$. 因为 $a|(mn)$ 和 $m|(mn)$, 所以 $mn$ 是 $a$ 和 $m$ 的公倍式. 我们有 $(am)|(mn)$. 故 $a|n$.

6. (10分) 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 证明:

(i) (5分) 设 $\phi$ 是单射且 $U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明: $\dim(U)=\dim(\phi(U))$;

(ii) (5分) 设 $\phi$ 是满射且 $W$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 证明: $\dim(\phi^{-1}(W))\geq\dim(W)$.

证明. *(i)* 设 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ 是 $U$ 的一组基. 则对任意 $\mathbf{u}\in U$, 存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{u}_k.$$

则 $\phi(\mathbf{u})=\alpha_1\phi(\mathbf{u}_1)+\cdots+\alpha_k\phi(\mathbf{u}_k)$. 于是, $\phi(U)=\langle\phi(\mathbf{u}_1),\ldots,\phi(\mathbf{u}_k)\rangle$.

设 $\beta_1,\ldots,\beta_k\in\mathbb{R}$ 使得 $\beta_1\phi(\mathbf{u}_1)+\cdots+\beta_k\phi(\mathbf{u}_k)=\mathbf{0}_m$. 则

$$\phi(\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{u}_k)=\mathbf{0}_m.$$

因为 $\phi$ 是单射, 所以 $\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{u}_k=\mathbf{0}_n$. 因为 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ 线性无关, 所以

$$\beta_1=\cdots=\beta_k=0.$$

故 $\phi(\mathbf{u}_1),\ldots,\phi(\mathbf{u}_k)$ 线性无关. 我们得到 $\dim(\phi(U))=k=\dim(U)$.

*(ii)* 设 $W$ 的一组基是 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_d$. 因为 $\phi$ 是满射, 所以存在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$, $i=1,\ldots,d$. 因为 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_d$ 线性无关, 所以 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d$ 线性无关*(*线性映射保持线性相关性*)*. 又因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d\in\phi^{-1}(W)$, 所以

$$\dim(\phi^{-1}(W))\geq d=\dim(W).$$

7. (10分) 设矩阵 $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 以它们为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间分别记为 $V_A$ 和 $V_B$. 令矩阵

$$C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(k+m)\times n}.$$

证明:

(i) (5分) 以 $C$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间 $V_C$ 等于 $V_A\cap V_B$;

(ii) (5分) $\dim(V_A+V_B)=n+\mathrm{rank}(C)-\mathrm{rank}(A)-\mathrm{rank}(B)$.

证明. *(i)* 设 $\mathbf{v} \in V_A \cap V_B$. 则 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}_k$ 且 $B\mathbf{v} = \mathbf{0}_m$. 故 $C\mathbf{v} = \mathbf{0}_{k+m}$. 于是, $\mathbf{v} \in V_C$. 设 $\mathbf{w} \in V_C$. 则 $C\mathbf{w} = \mathbf{0}_{k+m}$. 故 $A\mathbf{w} = \mathbf{0}_k$ 和 $B\mathbf{w} = \mathbf{0}_m$. 由此可知, $\mathbf{w} \in V_A \cap V_B$. 从而, $V_A \cap V_B = V_C$.
*(ii)* 我们计算

$$\begin{aligned}\dim(V_A + V_B) &= \dim(V_A) + \dim(V_B) - \dim(V_A \cap V_B) \quad [\because \text{维数公式}] \\ &= \dim(V_A) + \dim(V_B) - \dim(V_C) \quad [\because (i)] \\ &= (n - \operatorname{rank}(A)) + (n - \operatorname{rank}(B)) - (n - \operatorname{rank}(C)) \quad [\because \text{对偶定理}] \\ &= n + \operatorname{rank}(C) - \operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(B).\end{aligned}$$

8. (10分) 设矩阵 $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $r = \operatorname{rank}(A) > 0$. 令

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r}.$$

证明: $\operatorname{rank}(B) = r \Longleftrightarrow A$ 的前 $r$ 行线性无关且 $A$ 的前 $r$ 列线性无关.

证明. "$\Longrightarrow$" 因为 $\operatorname{rank}(B) = r$, 所以 $B$ 的 $r$ 个行向量 $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_r$ 线性无关. 因为 $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ 分别是 $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_r$ 从 $\mathbb{R}^{1\times r}$ 到 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的延伸, 所以 $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ 线性无关*(*课后习题已经证明*)*. 同理, $A$ 的前 $r$ 个列向量 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 也线性无关.

"$\Longleftarrow$" 因为 $\operatorname{rank}(A) = r$ 且 $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ 线性无关, 所以 $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_r$ 是行空间 $V_r(A)$ 的一组基. 故对任意 $i \in \{r+1, \ldots, m\}$, 存在 $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,r} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\vec{A}_i = \alpha_{i,1}\vec{A}_1 + \cdots + \alpha_{i,r}\vec{A}_r.$$

设 $C$ 是 $A$ 中前 $r$ 列组成的矩阵. 对上式取前 $r$ 个坐标得

$$\vec{C}_i = \alpha_{i,1}\vec{C}_1 + \cdots + \alpha_{i,r}\vec{C}_r.$$

由此和 $\vec{C}_1 = \vec{B}_1$, $\ldots$, $\vec{C}_r = \vec{B}_r$ 得出*:*

$$V_r(C) = \langle \vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_r \rangle. \tag{1}$$

因为 $C$ 的所有列就是 $A$ 的前 $r$ 列且它们线性无关, 所以 $\operatorname{rank}(C) = r$. 故 $\dim(V_r(C)) = r$. 根据 (1), $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_r$ 线性无关. 故 $\dim V_r(B) = r$, 即 $\operatorname{rank}(B) = r$.

“$\Longleftarrow$”之另证. 因为 $\mathrm{rank}(A)=r$ 且 $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_r$ 线性无关, 所以 $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_r$ 是行空间 $V_r(A)$ 的一组基. 故对任意 $i\in\{r+1,\ldots,m\}$, 存在 $\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,r}\in\mathbb{R}$ 使得

$$\vec{A}_i=\alpha_{i,1}\vec{A}_1+\cdots+\alpha_{i,r}\vec{A}_r.$$

故通过初等行变换, $A$ 可变为

$$D=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_r\\ O_{(m-r)\times n}\end{pmatrix}.$$

因为行变换不改变列的线性无关性, 所以列向量 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(r)}$ 蕴含线性无关 $\vec{D}^{(1)},\ldots,\vec{D}^{(r)}$ 线性无关. 但

$$\vec{D}^{(j)}=\begin{pmatrix}\vec{B}^{(j)}\\ \mathbf{0}_{m-r}\end{pmatrix},\quad ,j=1,\ldots,r.$$

故 $\vec{D}^{(1)},\ldots,\vec{D}^{(r)}$ 线性无关蕴含 $\vec{B}^{(1)},\ldots,\vec{B}^{(r)}$ 线性无关. 由此得出 $\mathrm{rank}(B)=r$.