中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数II-B (期中试卷)

任课教师：李子明、高艺漫、郑晓鹏

注意事项：

1. 考试时间为120 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, 和 $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3$.

(i) 计算矩阵 $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, 使得 $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)P$;

(ii) 证明 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

(iii) 设 $\mathbf{v} = (1,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$. 求 $\mathbf{v}$ 在基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 下的坐标.

解. *(i)* 直接计算得

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 因为 P 可逆, 所以 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(iii) 由坐标变换公式可知

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \square$$

2. (10分) 设有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. 计算 $\mathbb{Q}$ 上的可逆矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $P^tAP = D$.

解. 利用行列相伴消元直接可得

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad D = \mathrm{diag}\left(1, -8, \frac{41}{8}\right). \square$$

3. (15分) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型由公式 $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ 确定，其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$.

(i) 计算 q 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵.

(ii) 设 q 正定，求 λ 取值范围.

(iii) 是否存在实数 λ, 使得 q 是负定的？请说明理由.

解. (i) q 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) 矩阵 A 的三个主子式是

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 2 - \lambda^2, \quad \Delta_3 = 5 - 3\lambda^2.$$

由 Jacobi-Sylvester 判别法可知, A 正定当且仅当 $2 - \lambda^2 > 0$ 和 $5 - 3\lambda^2 > 0$, 即 $|\lambda| < \sqrt{5/3}$.

(iii) 因为 $\Delta_1 > 0$, 所以不存在实数 λ 使得 q 负定. $\square$

4. (15分) 设 F 是域, $F[x]^{(3)} = \{f \in F[x] \mid \deg(f) < 3\}$. 令

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & F[x]^{(3)} & \longrightarrow & F[x]^{(3)} \\ & f(x) & \mapsto & f(x+1) - f(x). \end{array}$$

(i) 验证 Δ 是线性算子.

(ii) 计算 Δ 在 $1, x, x^2$ 下的矩阵和 $\mathrm{rank}(\Delta)$.

(iii) $\ker(\Delta) + \mathrm{im}(\Delta)$ 是否等于 $F[x]^{(3)}$? 并说明理由.

解. *(i)* 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in F[x]^{(3)}$. 计算

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha f(x+1) + \beta g(x+1) - (\alpha f(x) + \beta g(x)) \\ &= \alpha(f(x+1) - f(x)) + \beta(g(x+1) - g(x)) \\ &= \alpha\Delta(f) + \beta\Delta(g). \end{aligned}$$

故 Δ 线性.

(ii) 因为 $\Delta(1)$=0, $\Delta(x)$=1 和 $\Delta(x^2)$=$2x+1$, 所以 Δ 在选定基底下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当 F 的特征不等于 2 时, $\operatorname{rank}(A)=2\Longrightarrow\operatorname{rank}(\Delta)=2$. 当 F 的特征等于 2 时, $\operatorname{rank}(A)=1\Longrightarrow\operatorname{rank}(\Delta)=1$.

(iii) 因为 $1\in\ker(\Delta)\cap\operatorname{im}(\Delta)$, 所以 $\ker(\Delta)+\operatorname{im}(\Delta)$ 不是直和. 于是, $\ker(\Delta)+\operatorname{im}(\Delta)$ 不等于 $F[x]^{(3)}$ □.

5. (10分) 设 V 和 W 是域 F 上的有限维线性空间, $\phi:V\to W$ 是线性映射. 证明:

(i) 如果 ϕ 是单射, 则 $\dim(V)\le\dim(W)$;

(ii) 如果 ϕ 是满射, 则 $\dim(V)\ge\dim(W)$;

(iii) 如果 $\dim(V)=\dim(W)$, 则 ϕ 是单射当且仅当 ϕ 是满射.

证明*: (i)* 设 ϕ 是单射. 则 V 与 $\operatorname{im}(\phi)$ 线性同构. 故 $\dim(V)=\dim(\operatorname{im}(\phi))$. 因为 $\operatorname{im}(\phi)\subset W$, 所以 $\dim(\operatorname{im}(\phi))\le\dim(W)$, 即 $\dim(V)\le\dim(W)$.

(ii) 设 ϕ 是满射. 则 $\operatorname{im}(\phi)=W$. 故 $\dim(\operatorname{im}(\phi))=\dim(W)$. 根据对偶定理

$$\dim(\ker(\phi))+\dim W=\dim V.$$

于是, $\dim W\le\dim V$.

(iii) 设 $\dim(V)=\dim(W)$. 如果 ϕ 是单射, 则 V 与 $\operatorname{im}(\phi)$ 线性同构. 故 $\dim(V)=\dim(\operatorname{im}(\phi))$. 进而, $\dim(\operatorname{im}(\phi))=\dim(W)$, 即 ϕ 是满射. 反之, 设 ϕ 是满射. 则 $\dim(\operatorname{im}(\phi))=\dim W$. 由对偶定理, $\dim(\ker(\phi))+\dim W=\dim V$. 故 $\dim(\ker(\phi))=0$. 由此可知, ϕ 是单射. □

6. (10分) 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, U 是 V 的子空间.

(i) 证明: 存在 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 使得 $U=\operatorname{im}(\mathcal{A})$.

(ii) 再设 W 是 V 的另一个子空且 $V=U\oplus W$. 证明: 存在 $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 使得 $U=\ker(\mathcal{B})$ 和 $W=\operatorname{im}(\mathcal{B})$.

证明: *(i)* 设 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d$ 是 U 的基. 把它扩充为 V 的一组基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d,\mathbf{e}_{d+1},\dots,\mathbf{e}_n$. 由线性映射第二基本定理, 存在 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_1$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_d)=\mathbf{e}_d$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_{d+1})=\cdots=\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)=\mathbf{0}$. 则

$$\mathrm{im}(\mathcal{A})=\langle\mathcal{A}(\mathbf{e}_1),\dots,\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)\rangle=\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d\rangle=U.$$

(ii) 再设 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_e$ 是 W 的一组基. 因为 $V=U\oplus W$, 所以 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d,\epsilon_1,\dots,\epsilon_e$ 是 V 的基. 由线性映射第二基本定理, 存在 $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 满足

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_1)=\cdots=\mathcal{B}(\mathbf{e}_d)=\mathbf{0},\mathcal{B}(\epsilon_1)=\epsilon_1,\dots,\mathcal{B}(\epsilon_e)=\epsilon_e.$$

由 *(i)* 可知, $\mathrm{im}(\mathcal{A})=W$.

显然, $U\subset\ker(\mathcal{B})$. 设 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{B})$. 令

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\cdots+\alpha_d\mathbf{e}_d+\beta_1\epsilon_1+\cdots+\beta_e\epsilon_e,$$

其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_d,\beta_1,\dots,\beta_e\in F$.

$$\mathcal{B}(\mathbf{x})=\beta_1\mathcal{B}(\epsilon_1)+\cdots+\beta_e\mathcal{B}(\epsilon_e)=\beta_1\epsilon_1+\cdots+\beta_e\epsilon_e=\mathbf{0}.$$

故 $\beta_1=\cdots=\beta_e=0$. 由此可知, $\mathbf{x}\in U$. 我们得到 $U=\ker(\mathcal{B})$. □

7. (10分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $r=\mathrm{rank}(A)>0$. 证明: A 是半正定的当且仅当存在矩阵 $B\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 使得 $A=B^tB$.

证明. 设 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. 则

$$\mathbf{x}^t(B^tB)\mathbf{x}=(B\mathbf{x})^t(B\mathbf{x})\geq 0.$$

于是, $A=B^tB$ 是半正定矩阵.

因为 A 半正定, 所以存在可逆矩阵 P 使得

$$A=P^t\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P=P^t\begin{pmatrix}E_r\\ O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & O\end{pmatrix}P.$$

令

$$B=\begin{pmatrix}E_r & O\end{pmatrix}_{r\times n}P.$$

则 $\mathrm{rank}(B)=r$ 且 $A=B^tB$. □

8. (15分) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 维线性空间, q 是 V 上的二次型且 $\mathrm{rank}(q)=2n$. 证明下面三个结论等价:

(i) 存在一个 n 维子空间 $U\subset V$ 使得对任意 $\mathbf{u}\in U$, $q(\mathbf{u})=0$;

(ii) q 的正惯性指数等于 n;

(iii) 存在 V 的某组基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2n}$ 使得对任意的 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_{2n}\epsilon_{2n} \in V$,

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}x_{2i}.$$

证明. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* 设 m 是 q 的正惯性指数. 则 q 在 V 的某组基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2n}$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \cdots - x_{2n}^2.$$

如果 $m > n$, 则维数公式蕴含存在非零向量 $\mathbf{u} \in \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_m \rangle \cap U$. 我们有

$$q(\mathbf{u}) > 0 \quad \text{和} \quad q(\mathbf{u}) = 0.$$

矛盾. 如果 $m < n$, 则 q 的负惯性指数 $2n - m > n$. 则维数公式蕴含存在非零向量

$$\mathbf{u} \in \langle \epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_{2m} \rangle \cap U.$$

我们有 $q(\mathbf{u}) < 0$ 和 $q(\mathbf{u}) = 0$. 矛盾. 于是, $m = n$.

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \cdots - x_{2n}^2.$$

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)* 由 *(ii)* 可知, q 有规范型:

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - \cdots - x_{2n}^2.$$

于是,

$$q(\mathbf{x}) = (x_1 + x_{n+1})(x_1 - x_{n+1}) + (x_2 + x_{n+2})(x_2 - x_{n+2}) + \cdots + (x_n + x_{2n})(x_n - x_{2n}).$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_{n+1} \\ y_2 = x_1 - x_{n+1} \\ y_3 = x_2 + x_{n+2} \\ y_4 = x_2 - x_{n+2} \\ \qquad \vdots \\ y_{2n-1} = x_n + x_{2n} \\ y_{2n} = x_n - x_{2n}. \end{cases}$$

因为上述变量代换是坐标变换(可逆的线性变换), 所以 q 在 V 的某组基底下的规范型是

$$y_1y_2 + y_3y_4 + \cdots + y_{2n-1}y_{2n}.$$

(iii) $\Longrightarrow$ *(i)* 设 $\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_{2n}$ 是 V 的一组基. 对任意 $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{2n} y_j\vec{\delta}_j$,

$$q(\mathbf{y}) = y_1y_2 + y_3y_4 + \cdots + y_{2n-1}y_{2n}.$$

令 $U = \langle\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_3, \ldots, \vec{\delta}_{2n-1}\rangle$. 则 $\dim(U) = n$ 且 $\mathbf{y} \in U$ 当且仅当

$$y_2 = y_4 = \cdots = y_{2n} = 0.$$

故对任意 $\mathbf{y} \in U$, $q(\mathbf{y}) = 0$. $\square$

注: (i) 和 (iii) 的等价性对任何特征不等于 2 的域 F 都成立. 但证明比较复杂.