

# 第十周习题课

李文桥

2023年11月24日

## 1 矩阵的运算

回忆: 设  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times s}$ .

1.  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ;
2.  $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;
3.  $(AC)^t = C^t A^t$ ;

若  $m = n$ , 即  $A, B$  为方阵, 则:

4.  $A$  可逆当且仅当存在方阵  $B$  使得  $AB = E_n$  (或者  $BA = E_n$ );
5. 若  $A$  可逆, 则  $(A^{-1})^{-1} = A$ ,  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ ;
6. 若  $A, B$  可逆, 则  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

习题4: 本题直接在矩阵层面进行运算即可.

- (1)  $AB$  为对称方阵  $\Leftrightarrow (AB)^t = AB \Leftrightarrow B^t A^t = AB \Leftrightarrow BA = AB$ ;
- (2)  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ .

补充习题1: 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 证明:

- (a)  $A^t A$  为对称方阵;
- (b) 若  $A$  既为对称阵又为斜对称阵, 则  $A = O$ ;
- (c) 若  $A \neq O$  且存在  $k \in \mathbb{R}$  使得  $A^t = kA$ , 则  $k = 1$  或  $-1$ .

证明都是直接的.

补充习题2: 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$  可逆且存在正整数  $k$  使得  $A^k = O$ . 证明以下矩阵可逆并求其逆:

$$(a) E_n - A; \quad (b) E_n + A; \quad (c) E_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}.$$

解: (c): 考虑  $E_n + \frac{1}{1!}(-A) + \frac{1}{2!}(-A)^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}(-A)^{k-1}$  即可.

补充习题3: 是否存在  $n$  阶方阵  $A$ , 使得任一  $n$  阶方阵  $X$  都能写成

$$X = a_0 E_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

的形式? 其中  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \cdots, m$ .

解: 不存在, 因为  $M_n(\mathbb{R})$  中的元素乘法不交换.

## 2 期中考题

题目与解析见课程主页.