第九次习题课讲义

2023.11.24

回顾：（用大写字母表示矩阵，并假设矩阵之间运算相容）

1. Sylvester 不等式．设 A 的列数为 s．
   则 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le s+\mathrm{rank}(AB)$．

2. 设 A．C 为满秩方阵．则 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(BC)$．

3. $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^t)$

4. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 方阵 A 满秩．
   $\Leftrightarrow$ 存在方阵 B，使得 $AB=E$．

5. 设 A．$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆，则：
   (i) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；(ii) $(A^{-1})^{-1}=A$；(iii) $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$．
   (iv) 设 $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^t$ 为未知数构成的向量，则线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$．

6. （搬运工引理）
   AE_{ij} 就是第 j 列为 $\vec{A}^{(i)}$，其余列为零的矩阵；
   $E_{ij}A$ 就是第 i 行为 $\vec{A}_j$，其余行为零的矩阵．

7. 矩阵代数 $M_n(\mathbb{R})$ 的中心元为标量矩阵，即 $\{\lambda E_n \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$．

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

计算：A^2, A^3, 并求对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$, A^k 的表达式.

注意到:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^k-1 & 2^k\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 7 & 8\end{pmatrix}$$

2. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{Z}^+$, 证明

$$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab+mc\\ 0 & 1 & mb\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

提示: 数学归纳法.

3. 证明: 任意一个 n 阶实数方阵都可以写成一个 n 阶对称矩阵和一个 n 阶斜对称矩阵的和.

(联想：任意函数均可写成一个偶函数和一个奇函数的和).

设 A 为方阵. 易证 $A+A^t$ 为对称方阵

$A-A^t$ 为斜对称方阵.

则 $A = \dfrac{A+A^t}{2} + \dfrac{A-A^t}{2}$ 写为一个对称方阵和一个斜对称方阵的和.

4. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵. 证明以下结论:

(1) AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$,

(2) 如果 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也是对称矩阵.

证：$\because$ A、B 是对称矩阵

$\therefore$ $A^t = A$, $B^t = B$

(1)

"$\Longrightarrow$" $\because$ AB 是对称矩阵

$\therefore$ $AB = (AB)^t = B^tA^t = BA$

"$\Longleftarrow$" $\because$ $AB = BA$

$\therefore$ $(AB)^t = B^tA^t = BA = AB$

$\therefore$ AB 是对称矩阵

(2) A是可逆矩阵. 即由 $E=(AA^{-1})^t=(A^{-1})^tA^t=(A^{-1})^tA$

得: $(A^{-1})^t=A^{-1}$ 故 A^{-1} 也是对称矩阵

5. 求所有 n 阶矩阵 A 使得对于任意 n 阶矩阵 X 都有 $\mathrm{tr}(AX)=0$.

本题方法与求矩阵的中心元的方法类似.

用特殊的矩阵($E_{i,j}$)去测试A的性质.

设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$. 对 $\forall\ 1\leq i,j\leq n$.

$$AE_{i,j}=\Big(O_{n\times(j-1)},\ \underset{j}{\underset{\downarrow}{\vec{A}^{(i)}}},\ O_{n\times(n-j)}\Big)$$

从而 $0=\mathrm{tr}(AE_{i,j})=a_{j,i}$ 故 $A=O$.

6. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 证明: 如果 $AB=O_{m\times n}$, 则 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\leq s$.

Sylvester 不等式: $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-s\leq\mathrm{rank}(AB)$