第十一周习题课

李文桥

2023 年 12 月 1 日

1　初等矩阵和打洞引理

回忆: 关于初等矩阵: 三类初等矩阵分别对应三类初等行(列)变换.

1. 将单位方阵的 i, j $(i \neq j)$ 两行(列)互换所得矩阵为第一类初等矩阵;
2. 任取实数 λ, 将单位方阵的第 i 行(列)的 λ 倍加到第 j $(i \neq j)$ 行(列)所得矩阵为第二类初等矩阵;
3. 任取非零实数 λ, 将单位方阵的第 i 行(列)倍乘 λ 所得矩阵为第三类初等矩阵.

容易看出, 这三类初等矩阵都是可逆的. 任取矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 对矩阵 A 做初等行(列)变换, 实际上就是对矩阵 A 左乘(右乘)相应对的初等矩阵. 例如, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$$A \xrightarrow{-4r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{用矩阵乘法来表达:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix};$$

$$A \xrightarrow{-3c_1+c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{用矩阵乘法来表达:} \quad A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

遵循“左行右列”的规律. 即左乘初等矩阵对应行变化, 右乘初等矩阵对应列变换.
设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$. 可用初等行列变化将 A 化为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 也就是说: 存在 m 阶初等矩阵 $P_1, \cdots, P_s$ 以及 n 阶初等矩阵 $Q_1, \cdots, Q_l$ 使得:

$$(P_s \cdots P_2 P_1) A (Q_1 Q_2 \cdots Q_l) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令 $P = P_s \cdots P_2 P_1$, $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_l$, 那么 P, Q 均可逆, 我们就得到打洞引理:

定理 1.1 *对任意的 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 存在 m 阶可逆方阵 P 以及 n 阶可逆方阵 Q 使得:*

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \operatorname{rank}(A)$.

注: 打洞引理也可以表达为: $A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$.

习题1. 首先将矩阵通过初等行变换化为单位阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

翻译成矩阵乘法:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从而:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

习题4. (跟矩阵结构有关的问题, 我们现在能用的定理只有打洞引理.) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A) = r$, 则由打洞引理, 存在 m 阶可逆方阵 P 以及 n 阶可逆方阵 Q 使得:

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

若设 $1 \le i \le r$, A_i 为第 i 行第 i 列为 1, 其余为 0 的$m\times n$矩阵, 则 $E_r = A_1 + \cdots + A_r$. 从而:

$$A = PA_1Q + \cdots PA_rQ.$$

由于 P, Q 可逆, 从而满秩, 故 $\operatorname{rank}(PA_iQ) = \operatorname{rank}(A_i) = 1,\ i = 1, \cdots, r$.

若存在 $B_1, \cdots B_{r-1}$ 为 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵, 使得 $A = B_1 + \cdots + B_{r-1}$, 则:

$$r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B_1 + \cdots + B_{r-1}) \le \operatorname{rank}(B_1) + \cdots + \operatorname{rank}(B_{r-1}) = r-1,\ \text{矛盾}.$$

从而 A 不能写成 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵的和.

补充: 证明任何一个方阵都能写成一个幂等矩阵和一个可逆矩阵的乘积. 其中, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 为幂等矩阵是指 A 满足 $A^2 = A$.

证明: 对于矩阵的结构性问题, 我们自然想到用打洞引理. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rank}(A) = r$. 由打洞引理, 存在 P, Q 为 n 阶可逆方阵, 使得:

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

则:

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = (P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1})(PQ).$$

令 $B=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}$, $C=PQ$. 则:

$$\begin{aligned}B^2=&P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}\\ =&P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}^2P^{-1}\\ =&P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}\\ =&B.\end{aligned}$$

B 为幂等矩阵. 从而 $A=BC$ 是一个幂等矩阵和一个可逆矩阵的乘积. □

2 矩阵求逆

回忆: 课上我们学了两种方法求矩阵的逆.

1. (初等行变换法) 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, 则考虑 $B=\begin{pmatrix}A \mid E_n\end{pmatrix}$, 用初等行变换将 B 的左半部分化为单位阵, 即:
$$B\xrightarrow{\text{一系列初等行变换}}\begin{pmatrix}E_n\mid G\end{pmatrix},$$
则 G 为 A 的逆.
原理: 上述过程翻译为矩阵乘法就是: 存在可逆矩阵 P 使得:
$$PB=\begin{pmatrix}E_n\mid G\end{pmatrix}.$$
也就是:
$$\begin{pmatrix}E_n\mid G\end{pmatrix}=PB=P\begin{pmatrix}A\mid E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}PA\mid P\end{pmatrix}$$
这说明 $PA=E_n$, $G=P$. 从而 G 为 A 的逆

2. (零化多项式) 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, 我们寻找 A 的一个“零化多项式”, 也就是找到 $m\in\mathbb{N}^+$ 以及 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 使得:
$$a_0E_n+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m=O\quad \text{且 } a_0\neq 0.$$
则:
$$E_n=-\frac{1}{a_0}(a_1E_n+a_2A+\cdots+a_mA^{m-1})A,$$
所以 A 的逆为 $-\dfrac{1}{a_0}(a_1E_n+a_2A+\cdots+a_mA^{m-1})$.

实际上, 求矩阵 A 的逆也就是找到一个同阶方阵 B 使得 $AB=E_n$ 或者 $BA=E_n$. 于是我们有:

3. (瞪眼法) 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, 想方设法找一个 n 阶方阵 B 使得 $AB=E_n$ 或 $BA=E_n$.

另外, 从方程组的角度来看, 求 n 阶矩阵的逆实际上就是解 n 个线性方程组的过程.

4. (解方程组法, 很不实用) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, 考虑如下 n 个线性方程组:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i,\ i = 1, \cdots n.$$

其中 e_i 为第 i 个分量为 1, 其余为 0 的向量. 由于 A 满秩, 这些方程组都确定. 设 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 为这 n 个方程组的解, 则 $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ 就是 A 的逆. 这是因为 $A(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = E_n$.

注: 上述方法本质上就是初等行变换法.

习题2: (a) 做初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac14 & \frac14 & -\frac14 & -\frac14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac14 & -\frac14 & \frac14 & -\frac14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac14 & -\frac14 & -\frac14 & \frac14 \end{pmatrix}$$

所以其逆为 $\begin{pmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & -\frac14 & -\frac14 \\ \frac14 & -\frac14 & \frac14 & -\frac14 \\ \frac14 & -\frac14 & -\frac14 & \frac14 \end{pmatrix}$

(b) 做初等行变换, 依次将第 i 行的 -1 倍加到第 $i-1$ 行, $i = 2, 3, \cdots, n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以逆为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) 注意到:

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

所以逆为 $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

补充习题: 求 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆, $n \geq 2$.

解: 令 $B = A + E_n$, 则 B 为所有位置均为 1 的矩阵. 很容易计算: $B^2 = nB$. 从而:

$$(A + E_n)^2 = n(A + E_n).$$

展开整理得:

$$A^2 - (n-2)A = (n-1)E_n.$$

故 $A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}(A - (n-2)E_n)$.

3 分块矩阵

回忆: 分块矩阵的乘法是一类十分重要的技巧, 善用分块矩阵可以得到很多不平凡的结果.

1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 若将 A, B 写成分块矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,l} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & A_{k,2} & \cdots & A_{k,l} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,t} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r,1} & B_{r,2} & \cdots & B_{r,t} \end{pmatrix},$$

   则需 $l = r$, 且对任意的 $i = 1, \cdots, l$, $A_{1,i}$ 的列数与 $B_{i,1}$ 的行数相同, 才能做分块矩阵的乘法 $AB = (\sum_{e=1}^{l} A_{i,e}B_{e,j})$. 需要注意的是, 乘法的左右两侧不能颠倒.

2. 对于分块矩阵, 我们仍有类似初等矩阵和初等行列变换的规律. 例如, 设 $A \in \mathbb{R}^{m_a\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m_c\times n}$, $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, B, D 有相容的行列数. 考虑 $F_1 = \begin{pmatrix} O & E_{m_c} \\ E_{m_a} & O \end{pmatrix}$, 则:

$$F_1G = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}.$$

   可以看到, F_1 很像第一类初等矩阵, 只不过写成了分块的形式, 交换了“第一行”和“第二行”. 让 F_1 左乘 G, 就对应着把 G 的“第一行”与“第二行”互换. 当然, 这里的“行”是相对于矩阵分块来说的. 这种类型的乘法依然遵循“左行右列”的原则.

再给定一个矩阵 $H \in \mathbb{R}^{m_c \times m_a}$, 考虑 $F_2 = \begin{pmatrix} E_{m_a} & O \\ H & E_{m_c} \end{pmatrix}$, 则:

$$F_2 G = \begin{pmatrix} A & B \\ C + HA & D + HB \end{pmatrix}.$$

这里 F_2 很像第二类初等矩阵, 它左乘 G 也确实让 G 做了一个类似"倍加"的操作. 特别地, 如果 A 是一个可逆方阵, 则只要令 $H = -CA^{-1}$, $F_2 G$ 的左下角就是零矩阵, 这个过程就类似于高斯消元. 一定要注意的是, 矩阵乘法的左右两侧不能颠倒($C + HA$ 不能写成 $C + AH$).

同样地, 给定矩阵 H 有 m_a 列, $F_3 = \begin{pmatrix} H & O \\ O & E_{m_c} \end{pmatrix}$, 则:

$$F_3 G = \begin{pmatrix} HA & HB \\ C & D \end{pmatrix}.$$

这种情形就与"倍乘"类似. 以上我们用"行"的情形举例, "列"的情形是类似的, 只是"初等矩阵"要右乘.

熟练掌握分块矩阵的"初等行列变换", 也就掌握了分块矩阵的核心技巧. 请牢记"左行右列".

习题3: (a) $X = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, $X^t = \begin{pmatrix} A^t & O \\ C^t & B^t \end{pmatrix}$. 由 $XX^t = X^tX$ 知:

$$\begin{pmatrix} AA^t + CC^t & CB^t \\ BC^t & BB^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tA & A^tC \\ C^tA & B^tB + C^tC \end{pmatrix}$$

这说明 $AA^t + CC^t = A^tA$. 取迹, 并注意到迹是矩阵乘法的交换不变量, 故得 $\mathrm{tr}(CC^t) = 0$, 也即 $\mathrm{tr}(C^tC) = 0$.

(b) 设 $C = (c_{i,j})_{m\times n}$. 计算:

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{tr}(C^tC) =& \mathrm{tr}((\sum_{k=1}^{m} c_{k,i}c_{k,j})_{n\times n}) \\ =& \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{m} c_{k,i}c_{k,i}) \\ =& \sum_{(k,i)=(1,1)}^{(m,n)} c_{k,i}^2 \end{aligned}$$

这说明 $c_{k,i} = 0$, $\forall 1 \le k \le m$, $1 \le i \le n$. 故 $C = O$.

习题5: (a) $\mathrm{rank}(E_n - A) + \mathrm{rank}(E_n - B) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} E_n - A & O \\ O & E_n - B \end{pmatrix}$. 于是我们利用分块矩阵的乘法对 $G = \begin{pmatrix} E_n - A & O \\ O & E_n - B \end{pmatrix}$ 做变换, 让 $E_n - AB$ 作为一个子矩阵出现在其中.

先将其“第二行”加到“第一行”, 则令 $H_1 = \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ O & E_n \end{pmatrix}$, 则:

$$H_1 G = \begin{pmatrix} E_n - A & E_n - B \\ O & E_n - B \end{pmatrix}.$$

只要再将“第一列”“倍乘 B ”加到“第二列”就可以了. 这时, 对列操作恰好需要右乘, 于是会出现 AB. 令 $H_2 = \begin{pmatrix} E_n & B \\ O & E_n \end{pmatrix}$, 则:

$$H_1 G H_2 = \begin{pmatrix} E_n - A & E_n - AB \\ O & E_n - B \end{pmatrix}$$

注意到 H_1, H_2 均满秩, 故 $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(H_1 G H_2) \geq \operatorname{rank}(E_n - AB)$.

(b) 设 $\operatorname{sol}(E_n - A), \operatorname{sol}(E_n - B), \operatorname{sol}(E_n - AB)$ 分别为以 $E_n - A, E_n - B, E_n - AB$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 不难发现 $\operatorname{sol}(E_n - A) \cap \operatorname{sol}(E_n - B) \subseteq \operatorname{sol}(E_n - AB)$. 实际上, 任取 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{sol}(E_n - A) \cap \operatorname{sol}(E_n - B)$, 有 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. 从而 $AB\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{sol}(E_n - AB)$. 于是 $\dim(\operatorname{sol}(E_n - A) \cap \operatorname{sol}(E_n - B)) \leq \dim(\operatorname{sol}(E_n - AB))$. 由对偶定理以及维数公式:

$$\begin{aligned} n - \operatorname{rank}(E_n - AB) =& \dim(\operatorname{sol}(E_n - AB)) \\ \geq& \dim(\operatorname{sol}(E_n - A) \cap \operatorname{sol}(E_n - B)) \\ =& \dim(\operatorname{sol}(E_n - A)) + \dim(\operatorname{sol}(E_n - B)) - \dim(\operatorname{sol}(E_n - A) + \operatorname{sol}(E_n - B)) \\ =& n - (\operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(E_n - B)) + n - \dim(\operatorname{sol}(E_n - A) + \operatorname{sol}(E_n - B)) \\ \geq& n - (\operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(E_n - B)) \end{aligned}$$

于是得到 $\operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(E_n - B) \geq \operatorname{rank}(E_n - AB)$.

补充1: 幂等矩阵的结构.

命题 3.1 *设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$. 则存在 $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, 使得:*

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

其中, r 为 A 的秩.

证明: 由打洞引理, 存在 P, Q 为 n 阶可逆方阵使得 $A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$. 则:

$$P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QP \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = A^2 = A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

由 P, Q 可逆, 上式两侧消去 P, Q 得:

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QP \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \tag{1}$$

令 $T=QP$, 并给 T 分块: $T=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix}$. 其中 $T_1\in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$, $T_4\in \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. 计算:

$$\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

结合 (1) 式可知 $T_1=E_r$. 而 $Q=TP^{-1}$, 故:

$$\begin{aligned}A=&P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q\\ =&P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}TP^{-1}\\ =&P\begin{pmatrix}E_r & T_2\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

令 $H=\begin{pmatrix}E_r & T_2\\ O & E_{n-r}\end{pmatrix}$, 不难看出(根据“初等行列变换”规律):

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & T_2\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}=PH^{-1}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}HP^{-1}$$

令 $P'=PH^{-1}$, 则 P' 可逆, 结论得证. □

推论 3.2 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 为幂等矩阵, 则 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(E_n-A)=n$.

补充2: 从方程组的角度看矩阵的秩.

命题 3.3 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,则 $\mathrm{rank}(A^tA)=\mathrm{rank}(A)$.

证明: 我们证明 $\mathrm{sol}(A^tA)=\mathrm{sol}(A)$. 一方面, $\mathrm{sol}(A)\subseteq \mathrm{sol}(A^tA)$ 是显然的. 另一方面, 设 $\boldsymbol{x}\in \mathrm{sol}(A^tA)$, 则 $A^tA\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 该式两侧同时左乘 $\boldsymbol{x}^t$, 得:

$$0=\boldsymbol{x}^tA^tA\boldsymbol{x}=(A\boldsymbol{x})^t(A\boldsymbol{x})$$

这说明 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{sol}(A)$. □