第十次习题课

矩阵的初等变换、矩阵求逆、矩阵分块

复习知识：

1. 矩阵的初等变换

定理8.2 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则 $A \sim_e B \iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

n阶初等矩阵：$F_{i,j}^{(n)}$，$F_{i,j}^{(n)}(\alpha)$，$F_i^{(n)}(\lambda)$

打洞引理 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则存在可逆矩阵 $P \in M_m(\mathbb{R})$ 和 $Q \in M_n(\mathbb{R})$，其中 P 和 Q 都是初等矩阵的乘积，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad \operatorname{rank}(A) = r.$$

$\Updownarrow$

(注：另一写法 $A = P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}$)

推论：可逆矩阵是若干初等矩阵之积.

作业1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2(-\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵求逆

法一: 命题9.2 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆. $B=(A, E_n)\in \mathbb{R}^{n\times 2n}$. $P\in M_n(\mathbb{R})$.

如果

$$PB=(E_n\,|\,Q),$$

则 $P=Q=A^{-1}$.

法二 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 设 k 是最小的正整数使得 $A^0, A^1, \cdots, A^k$ 在 $\mathbb{R}$ 上 "线性相关". 即存在 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\in\mathbb{R}$ 且 $\alpha_k\neq 0$ 使得

$$\alpha_k A^k+\cdots\cdots+\alpha_1 A+\alpha_0 E=O.$$

则:

A可逆 当且仅当 $\alpha_0\neq 0$

$$A^{-1}=-\frac{1}{\alpha_0}\left(\alpha_1 E+\cdots\cdots+\alpha_k A^{k-1}\right)$$

作业2.

(a). $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ $\qquad A^2=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4E$

故 $A^{-1}=\frac{1}{4}A$

(b). $B=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$. $\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$

(c). $C=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$, 其中 $A\in M_m(\mathbb{R})$. $B\in M_n(\mathbb{R})$ 均可逆

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}.$$

3. 矩阵分块

应用：(1) 矩阵求逆

(2) 证明矩阵秩的问题

(3). 解线性方程组问题

(4). 行列式计算

(5). 线性相关及矩阵分解

(6). 特征值问题．(相似，合同).

作业3.

设 $A\in M_m(\mathbb{R})$, $B\in M_n(\mathbb{R})$, $C\in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B\end{pmatrix}$.

满足 $XX^t = X^tX$.

证明：

$$tr(C^tC)=0.$$

证：

$$XX^t = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^t & 0 \\ C^t & B^t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^t+CC^t & CB^t \\ BC^t & BB^t\end{pmatrix}$$

$$X^tX = \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ C^t & B^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tA & A^tC \\ C^tA & C^tC+B^tB\end{pmatrix}$$

因为 $XX^t = X^tX$，所以

$$BB^t = C^tC+B^tB,$$

两边同时取迹，得

$$tr(BB^t) = tr(C^tC+B^tB) = tr(C^tC)+tr(B^tB).$$

又因为 $tr(BB^t) = tr(B^tB)$

所以 $tr(C^tC) = 0.$

作业4. 设 $A\in \mathbb{R}^{m\times n}$, $rank(A)=r$. 证明：A 可以写成 r 个秩为 1 的矩阵的和，且不能写成 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵的和.

由打洞引理，存在可逆矩阵 $P\in M_m(\mathbb{R})$ 和 $Q\in M_n(\mathbb{R})$，使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q$$

又 $\because \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \begin{pmatrix} E_{ii} & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$\therefore \quad A = \sum_{i=1}^{r} P \begin{pmatrix} E_{ii} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$

记 $A_i = P \begin{pmatrix} E_{ii} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$，则 $\operatorname{rank}(A_i) = 1$

故 A 可以写成 r 个秩为 1 的矩阵的和.

反证：假设 A 可以写成 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵的和.

即 $A = B_1 + \cdots + B_{r-1}$，其中 $\operatorname{rank}(B_i) = 1$

则：

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B_1 + \cdots + B_{r-1}) \le \operatorname{rank}(B_1) + \cdots + \operatorname{rank}(B_{r-1}) = r-1.$$

与 $\operatorname{rank}(A) = r$ 矛盾.

故：A 不能写成 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵的和.

作业5：设 A.B 为 n 阶方阵，证明：

$$\operatorname{rank}(E_n - AB) \le \operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(E_n - B).$$

法一：

因为：$E_n - AB = E_n - A + A(E_n - B)$

所以：

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(E_n - AB) &= \operatorname{rank}(E_n - A + A(E_n - B)) \\ &\le \operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(A(E_n - B)) \\ &\le \operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(E_n - B). \end{aligned}$$

法二. 设 $M=\begin{pmatrix} E_n-A & O \\ O & E_n-B \end{pmatrix}$.

根据引理10.8, $\operatorname{rank}(M)=\operatorname{rank}(E_n-A)+\operatorname{rank}(E_n-B)$.

我们计算:

$$N:=\begin{pmatrix} E_n & A \\ O & E_n \end{pmatrix} M=\begin{pmatrix} E_n-A & A-AB \\ O & E_n-B \end{pmatrix}$$

$$P:=N\begin{pmatrix} E_n & O \\ E_n & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n-AB & A-AB \\ E_n-B & E_n-B \end{pmatrix}$$

由矩阵乘法不可能增加秩, 所以 $\operatorname{rank}(M)\geq\operatorname{rank}(P)$.

而, $\operatorname{rank}(P)\geq\operatorname{rank}(E_n-AB)$.

故 $\operatorname{rank}(E_n-AB)\leq\operatorname{rank}(E_n-A)+\operatorname{rank}(E_n-B)$

法三.

设 H_1 是以 E_n-AB 为系数矩阵的齐次线性方程组.

H_2 ⋯ E_n-A 为 ⋯

H_3 ⋯ E_n-B 为 ⋯

则

由对偶定理得:

$$\dim(\operatorname{sol}(H_1))+\operatorname{rank}(E_n-AB)=n$$

$$\dim(\operatorname{sol}(H_2))+\operatorname{rank}(E_n-A)=n$$

$$\dim(\operatorname{sol}(H_3))+\operatorname{rank}(E_n-B)=n$$

$$\operatorname{rank}(E_n-AB) \leq \operatorname{rank}(E_n-A) + \operatorname{rank}(E_n-B)$$

$$\Longleftrightarrow: n-\dim(sol(H_1)) \leq n-\dim(sol(H_2)) + n-\dim(sol(H_3))$$

即: $\dim(sol(H_2)) + \dim(sol(H_3)) \leq n + \dim(sol(H_1))$.

对 $\forall \vec{x} \in sol(H_2) \cap sol(H_3)$, 则

$(E_n-A)\vec{x} = \vec{0}$, $(E_n-B)\vec{x} = \vec{0}$.

即: $A\vec{x} = \vec{x}$ 且 $B\vec{x} = \vec{x}$.

计算:

$(E_n-AB)\vec{x} = \vec{x} - AB\vec{x} = \vec{0}$ 则 $\vec{x} \in sol(H_1)$.

故: $\dim(sol(H_2) \cap sol(H_3)) \leq \dim(sol(H_1))$.

而 $sol(H_2) + sol(H_3) \subset \mathbb{R}^n$, 即 $\dim(sol(H_2) + sol(H_3)) \leq n$

由维数公式得:

$$\dim(sol(H_2)) + \dim(sol(H_3)) = \dim(sol(H_2) + sol(H_3)) + \dim(sol(H_2) \cap sol(H_3))$$

$$\leq n + \dim(sol(H_1))$$

因此: $\operatorname{rank}(E_n-AB) \leq \operatorname{rank}(E_n-A) + \operatorname{rank}(E_n-B)$.