第十二周习题课

李文桥

2023 年 12 月 8 日

1 行列式及其计算

回忆: 设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. 定义 A 的行列式为: $\det(A):=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$.
2. $\det(A)=\det(A^t)$.
3. 设 $\overrightarrow{A^{(i)}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, 则 $\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\overrightarrow{A^{(i)}},\cdots,\overrightarrow{A^{(n)}})=\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\boldsymbol{u},\cdots,\overrightarrow{A^{(n)}})+\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\boldsymbol{v},\cdots,\overrightarrow{A^{(n)}})$
4. 基本的运算性质.
5. 按行(列)展开: 设 $A_{i,j}$ 为 A 关于 $a_{i,j}$ 的代数余子式, 则 $\det(A)=\sum\limits_{j=1}^n a_{i,j}A_{i,j}$.
6. A 可逆当且仅当 $\det(A)\neq 0$.

常见的行列式:

1. 上(下)三角型: 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$, 则 $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
2. Vandermonde 行列式: 设 $x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$. 则 $\det(A)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

3. 三线型: 设 $a,b,c\in\mathbb{R},\ A_n=\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 则: $A_n=aA_{n-1}-bcA_{n-2}$.

4. 三爪型: 设 $a_i\neq 0\in\mathbb{R},\ i=1,\cdots n,\ b_i,c_i\in\mathbb{R},\ i=2,\cdots n.\ A=\begin{pmatrix} a & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, 则:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} d & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

其中 $d=a-\dfrac{b_2c_2}{a_2}-\cdots\dfrac{b_nc_n}{a_n}$.

1.1 行列式的定义

习题3: 根据行列式的定义直接求出 x^4,x^3 的系数. 不难看出 x^4 的系数只能是 5. 而产生 x^3 的项为:

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42},a_{12}a_{21}a_{33}a_{44},a_{12}a_{24}a_{33}a_{41},a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$, 计算可得 x^3 的系数为 -2.

补充1: 设 $n\geq 2,\ A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 中每个分量都是 1 或 -1. 则 $2\,|\det(A)$.

证明: 只要考虑 $\det(A)$ 模 2 同余即可. □

补充2: 设 $a_{ij}(x)$ 是连续可微实函数, 则 $D(x)=\det\big(a_{ij}(x)\big)$ 连续可微, 且:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}D(x) =&\det\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}a_{11}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(x) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{pmatrix}+\cdots\\ &+\det\begin{pmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_{nn}(x)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

证明*:* 根据行列式的定义和 Leibniz 法则即得. □

1.2 行列式的运算性质

习题1:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1\\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2\\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3\end{pmatrix}&=\det\begin{pmatrix}2(a_1+b_1+c_1) & b_1+c_1 & c_1+a_1\\ 2(a_2+b_2+c_2) & b_2+c_2 & c_2+a_2\\ 2(a_3+b_3+c_3) & b_3+c_3 & c_3+a_3\end{pmatrix}\\ &=2\det\begin{pmatrix}a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1\\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2\\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3\end{pmatrix}\\ &=2\det\begin{pmatrix}a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1\\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2\\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3\end{pmatrix}\\ &=2\det\begin{pmatrix}c_1 & a_1 & b_1\\ c_2 & a_2 & b_2\\ c_3 & a_3 & b_3\end{pmatrix}\\ &=2\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

习题 2: (2) 灵活运用初等行列变化和按行列展开计算.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{2r_2+r_4,2r_1+r_2,-\frac{3}{2}r_1+r_3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & -5 & 12 & 13 \\ 0 & \frac{17}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{29}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 12 & 13 \\ 17 & -9 & -29 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{12r_3+r_1,-9r_3+r_2} \begin{vmatrix} -5 & 0 & 25 \\ 17 & 0 & -38 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二列展开}} (-1)^{2+3}(-1)\begin{vmatrix} -5 & 25 \\ 17 & -38 \end{vmatrix} = 5\times 38 - 17\times 25 = -235.$$

习题 4: 三线型行列式, 只不过对角线上的分量不同. 直接按最后一行(列)展开即得:

$$\det(C_n) = \lambda_n \det(C_{n-1}) + \det(C_{n-2}).$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ 时, 由 $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ 知 C_n 为从第二项开始的 Fibonacci 数列, 于是 $C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$, 可参见第九周讲义例 7.22.

补充: 二阶线性递推数列. 设 $\{a_n\}$ 第一项为 a_1, 前两项 a_1, a_2 给定, 且有递推公式:

$$a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2} \tag{1}$$

其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (实际上, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 也是对的.) 用待定系数法转化为等比数列. 设 $p, q \in \mathbb{C}$ 使得:

$$a_n - pa_{n-1} = q(a_{n-1} - pa_{n-2}). \tag{2}$$

整理得:

$$a_n = (p+q)a_{n-1} - pq\, a_{n-2}.$$

对比 (1) 式, 我们令 $p+q=\lambda$, $pq=-\mu$, 则 p,q 是 $x^2 = \lambda x + \mu$ 的两根.

case 1: 若 $x^2 = \lambda x + \mu$ 有重根, 则 $p = q = \frac{\lambda}{2}$, (2) 式化为:

$$a_n - \frac{\lambda}{2}a_{n-1} = \frac{\lambda}{2}(a_{n-1} - \frac{\lambda}{2}a_{n-2}).$$

不断递推下去, 可得:

$$a_n - \frac{\lambda}{2}a_{n-1} = (\frac{\lambda}{2})^{n-2}(a_2 - \frac{\lambda}{2}a_1),$$

进一步:

$$\frac{a_n}{(\frac{\lambda}{2})^n} - \frac{a_{n-1}}{(\frac{\lambda}{2})^{n-1}} = \frac{a_2 - \frac{\lambda}{2}a_1}{(\frac{\lambda}{2})^2}$$

化为关于 $\{\frac{a_n}{(\frac{\lambda}{2})^n}\}$ 的等差数列, 求得:

$$a_n = (a_1 + (n-1)\frac{a_2 - \dfrac{\lambda}{2}a_1}{(\dfrac{\lambda}{2})})(\frac{\lambda}{2})^{n-1}.$$

case 2: 若 $x^2 = \lambda x + \mu$ 有重根, 设 A, B 为该方程的两个不同的根, 则 $(p,q) = (A,B)$ 或 (B,A), 从而 (2) 式可化为:

$$a_n - Aa_{n-1} = B(a_{n-1} - Aa_{n-2})$$
$$a_n - Ba_{n-1} = A(a_{n-1} - Ba_{n-2})$$

递推得:

$$a_n - Aa_{n-1} = B^{n-2}(a_2 - Aa_1)$$
$$a_n - Ba_{n-1} = A^{n-2}(a_2 - Ba_1)$$

上两式联立, 消去 a_{n-1} 可得:

$$a_n = \frac{a_2 - Ba_1}{A-B}A^{n-1} - \frac{a_2 - Aa_1}{A-B}B^{n-1}.$$

总结上述两种情况, 二阶线性递推数列 $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}$ 的通项形如 $a_n = (a_1 + \gamma(n-1))A^{n-1}$ 或者$a_n = \alpha A^{n-1} + \beta B^{n-1}$. 于是求其通项公式可按如下步骤:

1. 解特征方程 $x^2 = \lambda x + \mu$, 得到两个根 A, B.
2. 若 $A = B$, 则设 $a_n = (a_1 + \gamma(n-1))A^{n-1}$; 若 $A \neq B$, 则设 $a_n = \alpha A^{n-1} + \beta B^{n-1}$, 这里 γ, α, β 待定.
3. 令 $n = 1, 2$, 就可得到关于 γ 或者 α, β 的方程或方程组, 从而解出 γ 或者 α, β.

习题6: 该行列式很像 Vandermonde 行列式, 于是想到添加一行一列使其成为 Vandermonde 行列式.

设 $A(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$. 若按最后一列展开, 则 $\det(A(y)) = A_{n,n}y^n + A_{n,n-1}y^{n-1} +$

$\cdots + A_{n,1}$, 是关于 y 的多项式, 且 y^{n-1} 的系数 $A_{n,n-1}$ 即为所求行列式的相反数. 另一方面, $\det(A(y))$ 为 Vandermonde 行列式, 从而:

$$A(y) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\prod_{k=1}^{n}(y - x_k).$$

容易知道 $A(y)$ 中 y^{n-1} 的系数为 $-\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, 则所求行列式为 $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

补充: 求行列式: $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} - a_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n - a_n \end{vmatrix}$

解: 让每行减去第一行就化为三爪型.

2 分块与乘积

回忆: 1. 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$;

若设 $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 则 $\det\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$.

2. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 则 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3. (*Sylvester* 行列式恒等式)设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 则 $\det(E_n + BA) = \det(E_m + AB)$.

习题2: (1) 若令 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & c_4 & c_5 \\ 0 & d_4 & d_5 \\ 0 & e_4 & e_5 \end{pmatrix}$, 则所求行列式为 $\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B) = 0$.

习题5: 注意到:

$$\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B & O \\ B & A - B \end{pmatrix},$$

对上式取行列式即得.

补充: *Sylvester* 行列式恒等式的应用.

例 2.1 设 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ (回忆: 秩为 1 的矩阵结构),计算 $\det(E_n+A)$.

解:

$$\det(E_n+A)=1+(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=1+a_1b_1+\cdots a_nb_n.$$

例 2.2 设 $n\geq 2,\ \theta=\dfrac{\pi}{n},\ A=(\sin(i+j)\theta)_{n\times n}$, 求 $\det(A),\ \det(E_n+A)$.

解: 设 $F=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\\ \vdots & \vdots\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}\cos\theta & \cos 2\theta\cdots\cos n\theta\\ \sin\theta & \sin 2\theta\cdots\sin n\theta\end{pmatrix}$, 则:

$$FG=A,\ GF=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\theta\cos k\theta & \sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2 k\theta\\ \sum\limits_{k=1}^{n}\sin^2 k\theta & \sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\theta\cos k\theta\end{pmatrix}$$

当 $n\geq 3$ 时, A 不满秩, 所以 $\det(A)=0$. $n=2$ 时, 直接计算 $\det(A)=-1$. 利用 *Sylvester* 行列式恒等式, 我们有:

$$\det(E_n+A)=\det(E_n+FG)=\det(E_2+GF).$$

注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\theta\cos k\theta=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin 2k\theta,\ \sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2 k\theta=\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2k\theta,\ \sum\limits_{k=1}^{n}\sin^2 k\theta=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2k\theta$, 而 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin 2k\theta,\ \sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2k\theta$ 分别为 $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{2k\theta i}$ 的虚部和实部, 于是计算:

$$\sum_{k=1}^{n}e^{2k\theta i}=\frac{e^{2\theta i}(1-e^{2n\theta i})}{1-e^{2\theta i}}=0.$$

从而 $\det(E_n+A)=\det\begin{pmatrix}1 & \frac{n}{2}\\ \frac{n}{2} & 1\end{pmatrix}=1-\dfrac{n^2}{4}$.

注: 可用该方法计算 λE_n+H 的行列式, 其中 $H=(\sin(\alpha_i+\beta_j))_{n\times n}$ 或 $(\cos(\alpha_i+\beta_j))_{n\times n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

例 2.3 一般地, 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rank}(A) = r$. 则存在 $P \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times n}$, P, Q 满秩, 使得 $A = PQ$. 从而:

$$\det(E_n + A) = \det(E_r + QP).$$

这样就把需要计算的行列式从 n 阶降到了 r 阶.

补充: 用矩阵乘法.

例 2.4 设 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}, s_0 = n$. 求证:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2(n-1)} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)^2.$$

证明留作练习.