第十一次习题课

第三章 行列式 (I)

1. 多重线性斜对称函数

1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的多重线性函数

定义：映射：

$$f: \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) \longmapsto f(x_1, \cdots, x_m)$$

称为m重线性的：如果对任意 $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$，$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 我们有

$$f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{x}_{k+1}, \cdots, \vec{x}_m)$$
$$= \alpha f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \vec{u}, \vec{x}_{k+1}, \cdots, \vec{x}_m)$$
$$+ \beta f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{k-1}, \vec{v}, \vec{x}_{k+1}, \cdots, \vec{x}_m).$$

令 $f(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \cdots, \vec{e}_{j_m}) = a_{j_1 j_2 \cdots j_m}$，其中 $j_k \in \{1, 2, \cdots, n\}$

则 $f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) =$
$$\sum\sum\cdots\sum a_{j_1 j_2 \cdots j_m} x_{1,j_1} x_{2,j_2} \cdots x_{m,j_m}.$$

$$\left(\vec{x}_1 = \sum_{j_1=1}^{n} x_{1,j_1} e_{j_1}, \quad \cdots, \quad \vec{x}_m = \sum_{j_m=1}^{n} x_{m,j_m} e_{j_m} \right)$$

1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的多重斜对称线性函数

定义：映射：

$$f: \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m) \longmapsto f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m)$$

称为m重斜对称的，如果对任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，

$$f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_m)$$
$$= -f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_{j-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{j+1}, \cdots, \vec{x}_m)$$

---

f是 $\mathbb{R}^n$ 上n重斜对称线性函数：

$$f(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n) = \omega \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}.$$ 其中 $\omega = f(e_1, \cdots, e_n)$.

2. 行列式的定义和基本性质.

行列式函数 det 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重线性斜对称函数. 且 $\det(e_1, \cdots, e_n) = 1$.

定义. 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 矩阵A的行列式是

$$\det(\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)}).$$

记: $$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

性质:

1. $\det(A) = \det(A^t)$
2. $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ 为斜对称. $\det(A) = 0$. (注. A为奇数阶)
3. $\det(A) = \alpha \det(\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(j-1)}, \vec{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)})$
   其中 $\vec{A}^{(j)} = \alpha \vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
5. $\det(A) = \det(\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(j-1)}, \vec{u}, \vec{A}^{(j+1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)})$
   $+ \det(\vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(j-1)}, \vec{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)})$
   其中 $\vec{A}^{(j)} = \vec{u} + \vec{v}$.
6. 方阵A不满秩. $\det(A) = 0$
7. 方阵A可逆 $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

S_1. 交换方阵A中两不同列的位置得到方阵B. 则 $\det(B) = -\det(A)$.

S_2. 方阵A中有两列相同. 则 $\det(A) = 0$

S_3. A中某列是其它列的线性组合. 则 $\det(A) = 0$

S_4. 把A中某一列的倍式加到另一列上得到矩阵B. 则 $\det(B) = \det(A)$

3. ① 行列式按一行(列)展开.

$M_{i,j}$：矩阵 A 去掉第 i 行和第 j 列得到的 (n-1) 阶方阵的行列式.(余子式 co-minor)

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ (代数余子式)

Thm. $$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k}$$

(按第 i 行展开)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} A_{k,j}$$

(按第 j 列展开).

② 分块矩阵的行列式.

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

$$\det\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

$$\det\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn}\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

$A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$.

③ 乘法定理.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

思考. 设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 是可逆矩阵, 任意 $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

求 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$

作业:

1. 证明: $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

法一

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

(交换2.3列.再交换1.2列)

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

法二:

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

故: 原式成立.

2. 计算行列式.

(1)
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix} = 0$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -3 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 4 & 14 & -19 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 1 & 14 \\ 19 & 14 & -19 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & 15 & 14 \\ 19 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 19 & -5 \end{vmatrix} = -235$$

3. 分别求出在行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

的展开式中含x^4和x^3的项的系数.

x^4项的系数为5.

x^3项：应当在3行中取含x的元素，在其余1行中取不含x的元素.

(1) ① ② ③ ④ $\varepsilon(1432)=1$

$5x$ $\cancel{x \cdot 1}$ $-x$ x 1 $-5 \times (-1) = 5$

(2)	x	$\begin{cases}1\\-x\end{cases}$	x x	x 3	$\varepsilon(2134)=1$ $\varepsilon(2431)=2$	-1 -3
(3)	$\cancel{x}$ x	x	x	3	$\varepsilon(4231)=1$	-3

$5-1-3-3=-2.$

4. 设

$$C_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & & -1 & \lambda_{n-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

证明

(1) $\det C_n=\lambda_n\det C_{n-1}+\det C_{n-2}.$

(2) 当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$ 时，求出数值 $\det C_n$.

证：按第 n 行展开：

$$\det C_n=(-1)^{n+n-1}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix}C_{n-2} & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}+(-1)^{n+n}\cdot\lambda_n\det C_{n-1}$$

$$=\lambda_n\det C_{n-1}+\det C_{n-2}.$$

(2). 当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$ 时，

$\det C_1=1$，$\det C_2=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，$\det C_n=\det C_{n-1}+\det C_{n-2}.$

故 $\det C_n=f_{n+1}=\frac{\sqrt5}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right].$

（f_n 为 Fibonacci 序列）

5. 设 A.B 是任意 n阶方阵. 证明

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\cdot\det(A-B)$$

证:

$\because \begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B-A \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & 0 \\ B & B+A \end{pmatrix}$

$\therefore \det\left(\begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A-B & 0 \\ B & B+A \end{pmatrix}$

又$\because \det\left(\begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} A-B & 0 \\ B & B+A \end{pmatrix} = \det(A-B)\cdot\det(A+B)$

$\therefore$ 原式成立.

例:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

6. 构造 $n+1$ 阶行列式 $\widetilde{D}_{n+1}$:

$$\widetilde{D}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & & & & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_{n-1}^{n} & x_n^{n} & y^{n} \end{vmatrix}$$

$$= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$\widetilde{D}_{n+1}$ 的表达式中 y^{n-1} 的系数为

$$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

所求 D_n 是 $\widetilde{D}_{n+1}$ 的 $(n,n+1)$ 元的余子式，即 $\widetilde{D}_{n+1}$ 表达式中 y^{n-1} 的系数乘以 $(-1)^{n+(n+1)}$.

故: $D_n = (x_1+\cdots+x_n)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$

Sylvester 行列式恒等式:

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 则

$$\det(E_m+AB)=\det(E_n+BA).$$

eg: $\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & & & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix} = \left| E_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1 \cdots b_n) \right| = \left| E_1 + (b_1 \cdots b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right|$

$$= 1+\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$