第十二次习题课

2023.12.15

行列式(II)

行列式的应用

(1) 矩阵的逆

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆，则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{\vee}.$$

其中 $A^{\vee}$ 为 A 的伴随矩阵.

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

性质：

$$A^{\vee}A = AA^{\vee} = |A| E.$$

习题1.

(a) $$(\lambda A)^{\vee} = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1}A_{11} & \lambda^{n-1}A_{21} & \cdots & \lambda^{n-1}A_{n1} \\ \lambda^{n-1}A_{12} & \lambda^{n-1}A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \lambda^{n-1}A_{1n} & \cdots & \cdots & \lambda^{n-1}A_{nn} \end{pmatrix} = \lambda^{n-1} A^{\vee}$$

错误写法：

$$(\lambda A)\cdot(\lambda A)^{\vee} = |\lambda A| E_n = \lambda^n |A| E_n$$

$$\lambda A \cdot \lambda^{n-1} \cdot A^{\vee} = \lambda^n |A| E_n$$

矩阵乘法不满足消去律.

$|A^{\vee}||A| = |A^{\vee}A| = \big||A|E_n\big| = |A|^n$. $\Longrightarrow$ 这里注意 $|A| = 0$ 情况.

(b). 当 $\operatorname{rank}(A)=n$ 时. $|A|\neq 0$

则: $|A^\vee| = |A|^{n-1} \neq 0$ 故 $\operatorname{rank}(A^\vee)=n$

当 $\operatorname{rank}(A)=n-1$ 时, 存在一个 $n-1$ 阶子式非零, 则 $\operatorname{rank}(A^\vee)\geq 1$

由 Sylvester 不等式:

$$\operatorname{rank}(A^\vee)+\operatorname{rank}(A)-n \leq \operatorname{rank}(A^\vee A)=\operatorname{rank}(|A|E)=0$$

得: $\operatorname{rank}(A^\vee)\leq 1$

故 $\operatorname{rank}(A^\vee)=1$

当 $\operatorname{rank}(A)<n-1$ 时. 所有 $n-1$ 阶子式均为 0. 则 $\operatorname{rank}(A^\vee)=0$.

习题2.

(a) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^\vee \Longrightarrow A^\vee = |A|\cdot A^{-1}$

$$(A^\vee)^\vee = |A^\vee|\cdot(A^\vee)^{-1} = |A|^{n-1}\cdot\frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A$$

(b). 说明 A 不可逆时, 分为下面两种情况:

(i) $\operatorname{rank}(A)=n-1$. 则 $\operatorname{rank}(A^\vee)=1$.

$A^\vee$ 中所有大于 1 阶的子式都为 0.

若 $n>2$, 则 $n-1$ 阶子式均为 0, 有 $(A^\vee)^\vee = O = |A|^{n-2}A$

若 $n=2$, $(A^\vee)^\vee = A$, 结论成立.

(ii) $\operatorname{rank}(A)<n-1$, 则 $\operatorname{rank}(A^\vee)=0$. 即 $A^\vee=O$. 得 $(A^\vee)^\vee=O$

若 $n>2$, 则 $|A|^{n-2}=0$. 有 $|A|^{n-2}A=0$.

若 $n=2$, 则 $A=O$. 也有 $|A|^{n-2}A=O$. 故 $(A^\vee)^\vee=|A|^{n-2}A$.

综上结论成立.

(2) Cramer 法则

定理4.6. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 和 $\vec{b}=(b_1,\cdots,b_n)^t\in\mathbb{R}^n$. 再设 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^t$ 是未知数向量, 则方程组

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

确定 当且仅当 A 可逆. 此时, 该方程组的唯一解是

$$x_i=\frac{\det(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(i-1)},\vec{b},\vec{A}^{(i+1)},\cdots\vec{A}^{(n)})}{|A|},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

习题3.

设 $B=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}$ 满足

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

等价地: $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

因为 $ad-bc\neq 0$, 故可由 Cramer 法则得:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & b\\ 0 & d\end{vmatrix}}{ad-bc}=\frac{d}{ad-bc},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a & 1\\ c & 0\end{vmatrix}}{ad-bc}=\frac{-c}{ad-bc}$$

$$y_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & b\\ 1 & d\end{vmatrix}}{ad-bc}=-\frac{b}{ad-bc},\quad y_2=\frac{\begin{vmatrix}a & 0\\ c & 1\end{vmatrix}}{ad-bc}=\frac{a}{ad-bc}$$

因此 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的逆为 $\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc}\\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}$

习题4: 注意 A 是一个 n-1 行 n 列的矩阵. 设 H: $A\vec{x}=\vec{0}$.

任意 n-1 列线性无关. $\operatorname{rank}(A)=n-1$.

故 $\dim(\operatorname{sol}(H))=1$.

讲义 例4.11

由 (☆) $\alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \cdots + \alpha_n^i x_n = 0$. 思考行列式按一行(列)展开.

记 $B = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha_1^i} & \alpha_2^i & \cdots & \alpha_n^i \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \vdots & & & \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{pmatrix}$. 令 $x_j = B_{1j}$, B 关于1行j列的代数余子式.

即

$$x_j = (-1)^{j-1} \prod_{\substack{1\le p<q\le n \\ p,q\ne j}} (\alpha_q - \alpha_p).$$

(☆)式成立.

故 $sol(H) = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$, 其中 x_j 为上式结果.

习题5.

可逆元: $\bar{1}\quad \bar{3}\quad \bar{5}\quad \bar{7}\quad \bar{9}\quad \overline{13}\quad \overline{15}\quad \overline{17}\quad \overline{19}\quad \overline{21}$

其逆元分别为: $\bar{1}\quad \overline{15}\quad \bar{9}\quad \overline{19}\quad \bar{5}\quad \overline{17}\quad \bar{3}\quad \overline{13}\quad \bar{7}\quad \overline{21}$

习题6. 考查半群的定义: 验证: (1) 乘法封闭

(2) 乘法满足结合律

摄动法：

如果一个矩阵不是可逆矩阵，通过一个"扰动"使其变成可逆矩阵。

引理：设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，则 $|tE_n + A|$ 是一个首1的关于 t 的 n 次多项式。

proof:

由行列式定义

$$|tE_n + A| = \begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t+a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (t+a_{11})(t+a_{22})\cdots(t+a_{nn}) + \text{其他项}.$$

"不难看出"其他项中关于 t 的次数一定小于 n. 所以 $|tE_n + A|$ 形如 $t^n + \cdots\cdots$，即 $|tE_n + A|$ 是关于 t 的一个首1的n次多项式。(monic)

代数基本定理.

任何一个非零的一元 n 次复系数多项式，都正好有n个复数根。

推论：$|tE_n + A|$ 至多有 n 个实根。

命题(摄动法)

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，$t_0 \in \mathbb{R}$，当 $|t_0|$ 充分大时或者充分小(不等于0)时，$t_0E + A$ 可逆。

proof:

因为多项式 $f(t) = |tE_n + A|$ 的根为有限多个. 所以 $|t_0|$ 充分大或充分小(不等于0)时，$|t_0E_n + A| \neq 0$，则 $t_0E_n + A$ 可逆。

引理：设 $f(t), g(t)$ 是两个关于 t 的多项式，次数都小于等于 n。如果 $f(t), g(t)$ 有多于 n 个点取值相同，即存在 $t_1, \cdots, t_{n+1} \in \mathbb{R}$，使得 $f(t_i) = g(t_i)$，$i = 1, \cdots, n+1$，则 $f = g$，进一步得到

$$\forall\ t_0 \in \mathbb{R},\quad f(t_0) = g(t_0).$$

$\boxed{例}$：若 $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$，$\det(A) \neq 0$ 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(AD - CB), & 若\ AC = CA, \\ \det(DA - CB), & 若\ AB = BA. \end{cases}$$

Proof：

$$\because \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(DA - CA^{-1}BA)$$

$$= \begin{cases} \det(AD - CB), & AC = CA; \\ \det(DA - CB), & AB = BA. \end{cases}$$

应用：去掉例题中 $\det(A) \neq 0$，结论仍然成立。

考虑矩阵 $A_t = tE_n + A$。

令

$$X_t = \begin{pmatrix} A_t & B \\ C & D \end{pmatrix},\quad 对\ \forall\ t_0 \in \mathbb{R},\ \begin{cases} (t_0E_n + A)C = C(t_0E_n + A) \\ (t_0E_n + A)B = B(t_0E_n + A) \end{cases}$$

且当 $|t|$ 充分大时，$A_{t_0} = t_0E_n + A$ 可逆，

可以得到

$$|X_{t_0}| = \begin{cases} \det(A_{t_0}D - CB), & AC = CA \\ \det(DA_{t_0} - CB) & AB = BA \end{cases}$$

实际上，$|X_t|$，$\det(A_tD-CB)$，$\det(DA_t-BC)$ 都是关于 t 的次数不超过 n 的多项式。当 t 充分大时都成立。

所以

$$|X_t| = \begin{cases} \det(A_tD-CB), & AC=CA \\ \det(DA_t-CB), & AB=BA \end{cases}$$

特别地

t=0 时成立。

即 $$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(AD-CB), & AC=CA \\ \det(DA-CB), & AB=BA \end{cases}$$

练习：

证明 $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$

严格对角占优矩阵：

定义：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$，$A=(a_{ij})$，如果 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,n$，则称 A 为严格对角占优矩阵。

ex:
$$\begin{vmatrix} 100 & 5 & -10 \\ -10 & 200 & 5 \\ 1 & 3 & -70 \end{vmatrix}.$$

命题：严格对角占优矩阵都是可逆矩阵。

Proof：反证： 若 $|A|=0$，则 $\exists\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{x}\neq\vec{0}$. s.t $A\vec{x}=\vec{0}$.

设 $|x_t| = \max\{|x_i|\}$，显然 $|x_t|\neq 0$.

$$a_{t1}x_1 + \cdots + a_{tn}x_n = 0 \implies a_{tt}x_t = -\sum_{j\neq t} a_{tj}x_j$$

$\Rightarrow |a_{tt}||x_t| \le \sum_{j\ne t} |a_{tj}|\underline{|x_j|} \le \sum_{j\ne t} |a_{tj}|\underline{|x_t|}$

$\xRightarrow{|x_t|\ne 0} |a_{tt}| \le \sum_{j\ne t} |a_{tj}|$ 与定义矛盾 故 $|A|\ne 0$

命题:

严格对角占优矩阵如果对角线元素都大于0.

则行列式大于0.