第十三次习题课

2023.12 22

群.环.域.

$\mathbb{R}$上线性代数推广到任意域上. 例. $\mathbb{Q}$. $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}_p$.(p为素数)

群$(G, *, e)$

$*$: 二元运算.(封闭性) 结合律, 单位元, 逆元.

半群

例:

$(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$. $(\mathbb{C}, +, 0)$.

$(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$, $(\mathbb{Z}_n, +, \bar{0})$ $(\mathbb{Z}_p^*, +, \bar{1})$. p为素数

$(\mathbb{R}^{m\times n}, +, 0)$. $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot, E_n)$, $(SL_n(\mathbb{R}), \cdot, E_n)$

有限群. 无限群. Abel群.

子群. 判别定理:

设 H是群G的非空子集. 则 H是G的子群

当且仅当: $h_1, h_2 \in H$, $h_1 h_2^{-1} \in H$.

当且仅当: H对乘法封闭, 且$\forall h \in H$, 有 $h^{-1} \in H$.

定义: 设G为群, H为G的子群, 对于 $a \in G$. 令

$$aH = \{ah \mid h \in H\}, \quad Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

称 aH为 a 所在的H的左陪集.

Ha为 a 所在的H的右陪集.

定理(Lagrange) 设G是有限群，H是G的子群. 则 $\mathrm{card}(H) \mid \mathrm{card}(G)$

由子群H. 给出在群G上的等价关系$\sim$. 满足 $\forall a,b\in G$
$a\sim b$ 当且仅当 $aH=bH$.

$$\Updownarrow$$

$$b^{-1}aH=H \iff b^{-1}a\in H.$$

例: $G=\mathbb{Z}_{12}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9},\bar{10},\bar{11}\}$

之

$$H=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9}\}$$

则

$$\bar{1}+H=\{\bar{1},\bar{4},\bar{7},\bar{10}\}=\bar{4}+H=\bar{7}+H=\bar{10}+H$$
$$\bar{2}+H=\{\bar{2},\bar{5},\bar{8},\bar{11}\}=\bar{5}+H=\bar{8}+H=\bar{11}+H$$
$$H=\bar{3}+H=\bar{6}+H=\bar{9}+H.$$

例: $S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$

$$H=\{(1),(12)\}$$

$(13)H=\{(13),(123)\}$ $\quad H(13)=\{(13),(132)\}$

$(23)H=\{(23),(132)\}$ $\quad H(23)=\{(23),(123)\}$.

正规子群:

设H是群G的子群. 如果对 $\forall g\in G$ 都有
$gH=Hg$.

则称H为G的正规子群(normal subgroup).

商集 ⟶ 商群

定理：设 H 为群 G 的正规子群，则

$$G/H = \{ \bar{g} = gH \mid g \in G \}$$

依陪集的乘法（$aHbH = abH$）形成群.

称：群 G/H 为 G 按正规子群 H 作成的商群

例：群中元素的阶均有限，但群是无限群.

商群 G/H，其中 $G = (\mathbb{Q}, +)$

$H = (\mathbb{Z}, +)$

homomorphism

群同态：设 ϕ 是群 $(G, \cdot, e_G)$ 到群 $(H, \cdot, e_H)$ 的同态

(1). ϕ 把 e_G 映到 e_H.

(2). 同态像（image）

$$Im(\phi) = \{ \phi(g) \mid g \in G \}$$

(3) 同态核（kernel）.

$$\ker(\phi) = \{ g \in G \mid \phi(g) = e_H \}.$$

群同态基本定理：

$$G/\ker(\phi) \cong Im(\phi).$$

作业问题.

3. 证明: ∵ H 是 G 的一个非空子集, H 关于 G 的乘法封闭.
∴ 只需证明: 对 $\forall h \in H$, 有 $h^{-1} \in H$.
∵ G 是有限群
∴ H 是有限集合.
∴ 对 $\forall h \in H$, $\exists m \in \mathbb{Z}^+$, $h^m = e \in H$
即 $h^{-1} = h^{m-1} \in H$.
故. H 是一个子群.

4. 证明: (i) $\ker(\phi)$ 非空

(ii) 对 $\forall g_1, g_2 \in \ker(\phi)$. 有 $g_1 g_2^{-1} \in \ker(\phi)$.

(2). $g\ker(\phi) = \ker(\phi) g$.

证:

(i) $g\ker(\phi) \subset \ker(\phi) g$, (ii) $g\ker(\phi) \supset \ker(\phi) g$.

群的生成元:

$$\langle S \rangle = \{ x_1^{e_1} \cdots x_m^{e_m} \mid m \in \mathbb{Z}^+, x_1, \cdots, x_m \in S, e_1, \cdots, e_m \in \mathbb{Z} \}$$

命题: 设 G 是群, $g \in G$ 且 $ord(g) < \infty$, 则

$$card(\langle g \rangle) = ord(g)$$

进一步若 G 是有限群, 则

$$ord(g) \mid card(G).$$

循环群: 设 G 是群, 若存在 $g \in G$ 使得 $G = \langle g \rangle$, 则称 G 是循环群.

循环群的子群是循环群

无限循环群的非平凡子群与本身同构.

作业5:

证明 "$\Rightarrow$"

$\forall g \in G$, $ord(g) = ord(g^{-1})$

G中-阶元只有1个: e

G中m阶元($m \geq 3$)是成对出现的

有偶数个 ($\because$ 当$ord(g) \geq 3$时, $g \neq g^{-1}$)

因此由$|G|$是偶数

得 G中2阶元有奇数个.

"$\Leftarrow$" 不妨设 a为G中二阶元.

则 $\langle a \rangle = \{e, a\}$ 是 G的子群.

故 由$card(\langle a \rangle) \mid |G|$ 得

$|G|$是偶数.

群中元素的阶.

设$(G, \cdot, e)$是群, $g \in G$. 如果不存在$n \in \mathbb{Z}^+$使得$g^n = e$, 则称g是无限阶的, 否则称之为有限阶的. 如果k是最小的正整数满足$g^k = e$, 则称k是g的阶. 记为$ord(g)$.

ex:

置换群$(S_n, \circ, e)$中元素阶及计算方法见第一章

推论3.38

设 G 是群，$g \in G$ 且 $m = ord(g) < \infty$. 再设 $k \in \mathbb{Z}^+$.

则:

$$ord(g^k) = \frac{m}{gcd(m,k)} = \frac{lcm(m,k)}{k}.$$

推论 3.40

设 G 是群，$g \in G$ 且 $ord(g) < \infty$. 则

$$cord(\langle g \rangle) = ord(g).$$

定理. 3.41.

设 G 是有限群. $g \in G$, 则 $g^{cord(G)} = e$. 即

$$ord(g) \mid cord(G)$$

ex:

整数的加法群 $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$

关于 n 的剩余类的加法群 $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$.

$$\mathbb{Z}_n = \langle \bar{k} \rangle \iff ord(\bar{k}) = n$$

$$\Updownarrow$$

$$gcd(n,k) = 1$$

素数阶群是循环群.

任意循环群同构于 $(\mathbb{Z}, +, 0)$ 或 $(\mathbb{Z}_n, +, \bar{0})$.