第二周习题课

1、$p(\alpha_i)=\beta_i$ 即为 $\alpha_i^2 a+\alpha_i b+c=\beta_i$，$i=1,2,3$.

则方程组对应的增广矩阵为：$\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 & \beta_1\\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 & \beta_2\\ \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 & \beta_3\end{pmatrix}$

系数矩阵为 $\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & \alpha_1 & 1\\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1\\ \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1\end{pmatrix}$

注：改变 (a,b,c) 的排序，写出的矩阵可能有所不同

2.（矩阵化阶梯形，判断相容性）

(a) 增广矩阵：$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3}\end{pmatrix}$

$k=2$，$n=3$，$l_k=2<n$，故相容但不确定.

进一步化简：$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{3\times(2)}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 5 & 1 & -7\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-\frac{2}{5}(2)+(1)}\begin{pmatrix}3 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{39}{5}\\ 0 & 5 & 1 & -7\end{pmatrix}$ 第二行对应方程：$5x_2+x_3=-7$.

若任取 x_3，则 $x_2=\frac{1}{5}(-7-x_3)$ 被 x_3 表示.

同样地，第一行可得：$x_1=\frac{13}{5}-\frac{1}{5}x_3$. 则方程的解为：$\left(\frac{13}{5}-\frac{1}{5}x_3,\ \frac{1}{5}(-7-x_3),\ x_3\right)$

有无穷多个. 若令 $x_3=0$，则 $\left(\frac{13}{5},\ -\frac{7}{5},\ 0\right)$ 是方程组的一个解.

注意到 $\begin{pmatrix}3 & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$ 是方程组的系数矩阵作初等行变换之后得到的

矩阵，其解集为 $\left\{\left(-\frac{1}{5}x_3,\ -\frac{1}{5}x_3,\ x_3\right)\middle|\ x_3\text{任取}\right\}$

则原方程组的解集即是 $\{(\frac{13}{5},-\frac{7}{5},0)+(-\frac{1}{5}x_3,-\frac{1}{5}x_3,x_3)\mid x_3任取\}$

也可以将 x_2 任取，把 x_1, x_3 写成 x_2 的表达式，得到的解集是一样的，只是表达式不同

(b) 增广矩阵为：$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{初等行变换} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$k=2$，$n=3$，$r_k=2<n$，相容但不确定.

(c) 增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{初等行变换} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$k=3$，$n=3$，$r_k=3=n$. 确定. 解为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

3、对 B 作初等行变换. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 1 & 6 & 3 & \lambda_2 \\ 3 & -2 & 1 & \lambda_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{消第1列} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 5 & 2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & -5 & -2 & \lambda_3-3\lambda_1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{消第2列} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 5 & 2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3+\lambda_2-4\lambda_1 \end{pmatrix}$

(i)：相容 $\iff r_k<n+1 \iff \lambda_3+\lambda_2-4\lambda_1=0$.

(ii)：不存在. 因为确定 $\Rightarrow \lambda_3+\lambda_2-4\lambda_1=0$，此时方程不确定.

（或：系数矩阵作初等行变换后为：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，容易看出解不唯一，

故原方程组不可能确定）

4、

(a) 设方程组为 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0$，$i=1,2,\ldots,m$

则 $\begin{cases} a_{i1}\alpha_1+\cdots+a_{in}\alpha_n=0 & (1) \\ a_{i1}\beta_1+\cdots+a_{in}\beta_n=0 & (2) \end{cases}$ $u(1)+v(2) \Rightarrow$

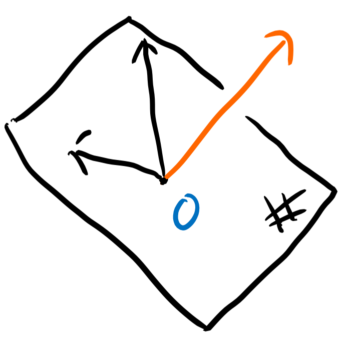
$a_{i1}(u\alpha_1+v\beta_1)+\cdots+a_{in}(u\alpha_n+v\beta_n)=0$

从而 $x_1=u\alpha_1+v\beta_1,\ldots,x_n=u\alpha_n+v\beta_n$ 也为一个解.

「从代数角度：线性性. 从几何角度：先令 $n=3$，考虑单个方程

$ax_1+bx_2+cx_3=0$ 这实际上是在说向量 (a,b,c) 与 (x_1,x_2,x_3) 垂直.

所以这个方程的解集就是由所有与 (a,b,c) 垂直的向量构成



图中 O 为原点. 两条黑色箭头都是方程的解.

解集实际上是一个平面. 平面上，两个向量作线性组合

仍在平面上.

问题 $Ax+By+Cz=D$ 代表3维空间中一张平面 」

(b) 方法同 (a).

5、数学归纳法. 欲证明某个与自然数 n 有关的命题时，有时会考虑使用数学归纳法

假设欲证明命题为 P，P 与自然数 n 有关

第一类归纳方法：

1°. 证明 n 比较小时 P 成立 (如 $n=0,1$)

P 成立.

2°. 证明：若 P 对 $n-1$ 成立，P 对 n 也成立

完成步骤 $1^\circ, 2^\circ$. 即完成命题 P 的证明.

原理：$n=0$ 成立 $\Rightarrow$ $n=1$ 成立 $\Rightarrow$ $n=2$ 成立 $\Rightarrow \cdots$

(1°) $\qquad$ (2°) $\qquad$ (2°)

从而对任意的自然数 n，P 成立

例如：证明 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

证：$n=1$ 时，$1^3 = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$，故命题成立.

设命题对 $n-1$ 成立，即 $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2$

则
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + n^3$$
$$= n^2 \left(\frac{(n-1)^2}{4} + n\right)$$
$$= n^2 \frac{(n+1)^2}{4}$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
，命题对 n 也成立.

则命题得证，该命题还可以写成：$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

「关于求和式 $\sum_{k=1}^{n} k^m$，m 为正整数，记 $T_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$.

$T_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. 考虑 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$，$k=1,\dots,n$ 共 n 个等式.

将这 n 个等式相加，得：$(n+1)^3 - 1 = 3T_2(n) + 3T_1(n) + n$，可求得

$T_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. 同样地，考虑 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$，$k=1,\dots,n$

n 个等式相加：$(n+1)^4 - 1 = 4T_3(n) + 6T_2(n) + 4T_1(n) + n$，可求得 $T_3(n)$.

按照这样的方法，可递推地求得 $T_m(n)$，$\forall m \in \mathbb{N}$.」

例如：设 $h>-1$，则 $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ 对 $\forall n\in \mathbb{N}^+$ 成立

证：当 $n=1$ 时 $1+h \geqslant 1+h$，命题成立.

设命题对 $n-1$ 成立，即 $(1+h)^{n-1} \geqslant 1+(n-1)h \quad (n\geqslant 2)$

则由 $h>-1$ 知 $1+h>0$，从而：$(1+h)^n = (1+h)^{n-1}\cdot(1+h)$

$$\geqslant (1+(n-1)h)(1+h)$$

$$= 1+nh+(n-1)h^2$$

$$\geqslant 1+nh$$，对 n 也成立.

则命题成立.

第二类归纳方法：

1° 证明n比较小时P成立(如$n=0,1$)

2° 证明：当P对小于n的自然数成立时，P对n也成立

1°,2°步骤即得P成立

原理：$n=0$成立 $\Rightarrow$ $n=1$成立 $\Rightarrow$ $n=2$成立 $\Rightarrow$ ……

(1°)　　(2°)　　(2°)

例如：设$n\geq 2$为正整数，则n可写成有限个素数的乘积

(素数是指不能被1与自身之外的任何数整除的数)

证. $n=2$ (命题只对$n\geq 2$叙述) 时，2是素数，命题成立.

设命题对小于n的正整数均成立，考虑正整数n. 若n为素数，则命题成立，否则存在$m\in\mathbb{N}^+$，$m\neq 1,n$，$m|n$. 可设$n=km$，则$2\leq k,m<n$. 由归纳假设k,m均可写成有限个素数乘积，从而n也可写为有限个素数的乘积，命题对n也成立. 从而命题得证.

1. n可分解为有限个素数的乘积，且分解方式唯一(算术基本定理)
2. 本问题不能用第一种归纳方法证明，第二种归纳方法更强

(*) 另一种归纳方法(反向归纳)　　　　该步骤证明了

1° 证明n比较小时结论成立(如$n=0,1$)，假设$n=a$时结论成立.

2° 证明：对某一递增至无穷的正整数数列$a_1,a_2,\dots,a_m,\dots$

若P对a_{m-1}成立，则P对a_m成立.

3° 证明：若P对 n 成立，则P对 $n-1$ 成立.

1°，2°，3° $\Rightarrow$ P成立.

原理：$\underset{\substack{\uparrow \\ (1^\circ)}}{a_1\text{成立}} \underset{\substack{\uparrow \\ (2^\circ)}}{\Longrightarrow} a_2\text{成立} \Longrightarrow \cdots\cdots$

对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，由于 $\{a_k\}$ 递增至无穷，故存在 $k\in\mathbb{N}^+$，s.t. $n<a_k$.

则：$a_k\text{成立} \underset{\substack{\uparrow \\ (3^\circ)}}{\Longrightarrow} a_k-1\text{成立} \underset{\substack{\uparrow \\ (3^\circ)}}{\Longrightarrow} a_k-2\text{成立} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow n\text{成立}$.

例如：（基本不等式）设 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^+$，则 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

证：$n=1$ 时成立. $n=2$ 时：$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geq 0 \Rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1x_2}$ 也成立.

先证明：若对于 2^{k-1} 成立，则对于 2^k 也成立.

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}=\frac{(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\cdots+(x_{2^k-1}+x_{2^k})}{2^k}$$

$$\geq\frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+\cdots+\sqrt{x_{2^k-1}x_{2^k}}}{2^{k-1}}$$

$$\text{（归纳假设）}\geq\sqrt[2^{k-1}]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}\cdot\cdots\sqrt{x_{2^k-1}x_{2^k}}}$$

$$=\sqrt[2^k]{x_1x_2\cdots\cdots x_{2^k}}$$

对 2^k 成立.

再证明：若对 n 成立，则对 $n-1$ 也成立.

$$\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)(x_1+\cdots+x_{n-1})+\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_{n-1})\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{n-1}{n}x_1+\cdots+\frac{n-1}{n}x_{n-1}+\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_{n-1})\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1})\right]$$

$$(\text{归纳假设})\geq\sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1})\right)}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\geq\sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}}\Rightarrow\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\geq\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$$

对 $n-1$ 也成立.

那么，对任何一个正整数 n，命题成立

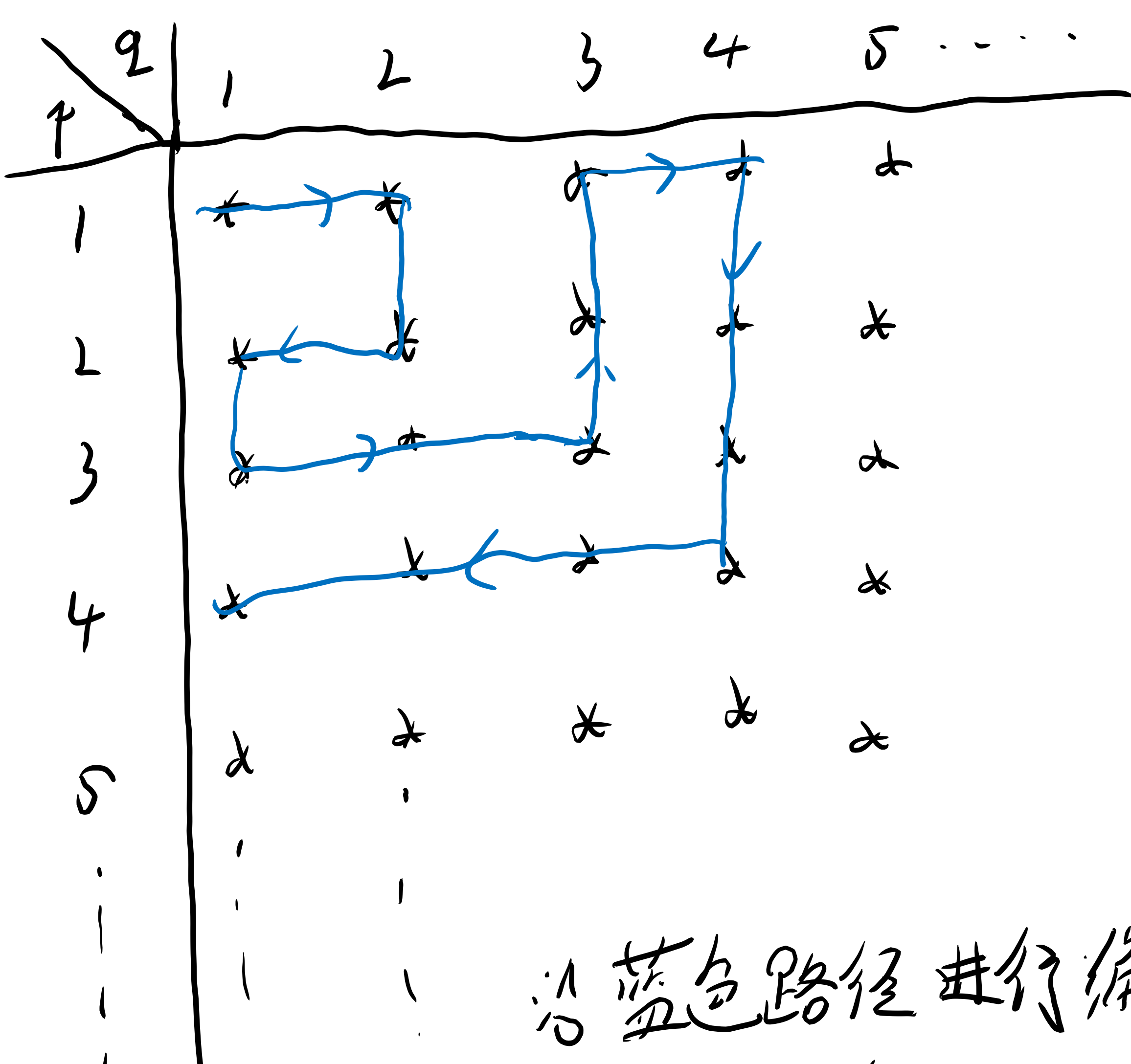
「从证明过程可以看出：等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$」

可数集:

与 $\mathbb{N}^+$ 等势的集合称为可数集.

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ 为可数集.(因此,与 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$ 等势的集合也为可数集)
2. $\mathbb{Q}$ 为可数集
3. $\mathbb{R}$ 不可数.

证: 2. 用 $\mathbb{Z}$ 给 $\mathbb{Q}$ "编号": $\forall \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, 0对应0



沿蓝色路径进行编号.

第1个数对应1, 第2个与之前不重复的数对应2, ……

若 $q<0$, 则用 $-1, -2 \dots$ 编号即可