习题课讲义一

张英瑞 2023.09.22 505教室

内容：

- 复习上周课上讲的概念和重点内容；
- 讲解作业中出现的问题及注意事项；
- 补充新知识。

一、概念:

- 实系数线性方程(组) ——齐次、非齐次——n个未知数和m个方程——(不)相容的、（不）确定的——矩阵表示
- 系数矩阵——增广矩阵
- 矩阵的初等行变换——$(r_i \leftrightarrow r_j)$、$(r_i + \alpha r_j)$、$(\alpha r_j)$.

二、作业:

1、 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是实数, 且二次多项式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 满足

$$p(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

列出 $p(x)$ 的系数 a, b, c 满足的线性方程组并写出该方程组对应的系数矩阵和增广矩阵.

解：根据$p(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3$, 得到$p(x)$ 的系数 a, b, c 满足的线性方程组为

$$\begin{cases} a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c = \beta_1 \\ a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c = \beta_2 \\ a\alpha_3^2 + b\alpha_3 + c = \beta_3 \end{cases},$$

其对应的系数矩阵和增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

注意区分方程组中的系数与未知数.

2、 判定下列三个线性方程组是否相容和是否确定:

$$\text{(a)}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}, \quad \text{(b)}\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}, \quad \text{(c)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

解:

非齐次线性方程组无法通过方程的个数与未知数的个数关系，直接判断。需将其增广矩阵化为阶梯型。

(a) 略

(b) 对其增广矩阵进行初等行变换化为阶梯型

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由定理可知该方程组是相容的、不确定的。

(c) 其增广矩阵为:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

利用初等行变换把其化为阶梯型

$$B \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

由定理可知该方程组是相容的且确定的。

3、 设 3×4 矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 1 & 6 & 3 & \lambda_2 \\ 3 & -2 & 1 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是实数. 设 L 是以 B 为增广矩阵的线性方程组. 回答下列问题并说明理由:

(i) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 需要满足什么条件才能使得 L 是相容的?

(ii) 是否存在 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使得 L 是确定的?

解: 将B化为阶梯型矩阵

$$B\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 5 & 2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 3 & -2 & 1 & \lambda_3 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 5 & 2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & -5 & -2 & \lambda_3-3\lambda_1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 5 & 2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2+\lambda_3-4\lambda_1 \end{pmatrix}$$

(i) 要使L相容，则$\lambda_2+\lambda_3-4\lambda_1=0$.

(ii) 要使L确定，则L必是相容的。由(i)可知，B可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 5 & 2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可知: 不存在$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使得$L$确定。

4、 设线性方程组 H 有两组不同的解 $x_1=\alpha_1,\ldots,x_n=\alpha_n$ 和 $x_1=\beta_1,\ldots,x_n=\beta_n$.

1. 若 H 是齐次的，证明: 对任意实数 u,v,

$$x_1=u\alpha_1+v\beta_1,\ldots,x_n=u\alpha_n+v\beta_n$$

也是 H 的解.

2. 若 H 是非齐次的，证明：对任意实数 k,

$$x_1 = \alpha_1 + k(\alpha_1 - \beta_1), \ldots, x_n = \alpha_n + k(\alpha_n - \beta_n)$$

也是 H 的解.

证明： 1、设齐次线性方程组H为

$$A\vec{x} = \vec{0}, \text{ 其中} A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由已知可得

$$A\vec{\alpha} = \vec{0} \text{ 和} A\vec{\beta} = \vec{0}$$

其中

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

则：

$$A(u\vec{\alpha} + v\vec{\beta}) = uA\vec{\alpha} + vA\vec{\beta} = u\vec{0} + v\vec{0} = \vec{0}, \text{ 得证.}$$

2、设非齐次线性方程组H为

$$A\vec{x} = \vec{b}, \text{ 其中} A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

由已知可得

$$A\vec{\alpha} = \vec{b} \text{ 和} A\vec{\beta} = \vec{b}$$

其中

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

则：

$$A(\vec{\alpha} + k(\vec{\alpha} - \vec{\beta})) = (k+1)A\vec{\alpha} - kA\vec{\beta} = (k+1)\vec{b} - k\vec{b} = \vec{b}, \text{ 得证.}$$

5、 利用数学归纳法证明: 对任意正整数n,

$$(1+h)^n \geq 1+nh \ (h\text{为正实数}), \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

证明: 略

三、补充知识

数学归纳法:

Peano公理：任何自然数构成的非空集合一定有最小元。

第一数学归纳法原理:
对于每个$n \in \mathbb{N}$,存在某个命题$P(n)$,如果下面两条成立：

- P(1)成立，
- 对给定任意的$m \in \mathbb{N}$, 由$P(m)$成立, 能推出$P(m+1)$成立。

则对所有的$n \in \mathbb{N}, P(n)$成立。

第二数学归纳法原理(完全数学归纳法)
对于每个$n \in \mathbb{N}$,存在某个命题$P(n)$,如果下面两条成立：

- P(1)成立，
- 对给定任意的$m \in \mathbb{N}$, 由$P(k)$对所有$k \leq m$成立, 可推出$P(m+1)$成立。

则对所有的$n \in \mathbb{N}, P(n)$成立。

Example 1:
对每个$n \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} a^{2n+1}+b^{2n+1} &= (a+b)[a^{2n}+(-1)a^{2n-1}b+(-1)^2a^{2n-2}b^2+\cdots+(-1)^{2n}b^{2n}] \\ &= (a+b)\big(\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i a^{2n-i}b^i\big) \end{aligned}$$

证明：
1) 当$n=1$时, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,
2) 对给定$m \in \mathbb{N}$,假设上式对所有$k \in m$成立, 即

$$a^{2k+1}+b^{2k+1} = (a+b)\big(\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i a^{2k-i}b^i\big).$$

当$n=m+1$时

$$\begin{aligned}
a^{2(m+1)+1}+b^{2(m+1)+1}=a^{2m+3}+b^{2m+3}&=(a^2+b^2)(a^{2m+1}+b^{2m+1})-(a^{2m+1}b^2+a^2b^{2m+1})\\
&=(a^2+b^2)(a+b)\big(\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2m-i}b^i\big)-a^2b^2(a^{2(m-1)+1}+b^{2(m-1)+1})\\
&=(a^2+b^2)(a+b)\big(\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2m-i}b^i\big)-a^2b^2(a+b)\big(\sum_{i=0}^{2(m-1)}(-1)^i a^{2(m-1)-i}b^i\big)\\
&=(a+b)[\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2(m+1)-i}b^i+\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2m-i}b^{i+2}-\sum_{i=0}^{2(m-1)}(-1)^i a^{2m-i}b^{i+2}]\\
&=(a+b)[\sum_{i=0}^{2m}(-1)^i a^{2(m+1)-i}b^i+(-1)^{2m-1}ab^{2m+1}+(-1)^{2m}b^{2(m+1)}]
\end{aligned}$$

故对$n=m+1$也成立。由第二数学归纳法，Example 1式对$\forall n\in\mathbb{N}$都成立。

排列与组合:

有一盒子装有n个球，分别标号为$1,\dots,n$，每次取一个，共取r次，并按照取出的顺序排列。称做从n个不同的元素里取出r个元素的排列。排列的个数为排列数，记为A_n^r。$A_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$.

有一盒子装有n个球，分别标号为$1,\dots,n$，每次取出r个作为一组。称做从n个不同的元素里取出r个元素的组合。组合的种类数为组合数，记为$C_n^r=\binom{n}{r}$。$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$.

性质：

$$1).\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r},\quad 2).\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}.$$

Example 2:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

a^kb^{n-k} 即选取k个$a,(n-k)$个b相乘的种类数为$\binom{n}{k}$.

推论：

$$1).\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

$$2). \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

问题： 数学归纳法证明Example 2.