第三周习题课

李文桥

2023 年 10 月 8 日

1 补充内容：二项式定理、可数集

1.1 二项式定理

定理 1.1 设 a, b 是两个可做加法、乘法且乘法交换的元素. 则对任一正整数 n:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i.$$

这里 C_n^i 为组合数.

例 1.2 令 $p \in \mathbb{N}$, $f = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, $y = x - 1$. 试将 f 写成关于 y 的表达式.

解: 若 $x \neq 0$, 则:

$$\begin{aligned} f =& \frac{x^p - 1}{x - 1} \\ =& \frac{1}{y}((y+1)^p - 1) \\ =& \frac{1}{y}(y^p + C_p^1 y^{p-1} + \cdots + C_p^p y) \\ =& y^{p-1} + C_p^1 y^{p-2} + \cdots + 1. \end{aligned}$$

1.2 可数集与势

与 $\mathbb{N}^+$ 等势的集合称为可数集.

命题 1.3 *(1)* $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 为可数集, 从而与 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 等势的集合也为可数集;

(2) $\mathbb{Q}$ 为可数集;

(3) $\mathbb{R}$不为可数集.

(3) 的证明: 通过双射 $(0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$, $\mathbb{R}$ 与 $(0,1)$ 等势. 下面证明 $(0,1)$ 不可数. 反证法, 假设 $(0,1)$ 可数, 则设 $(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, \cdots\}$. 对每个 $i \in \mathbb{N}^+$,设 x_i 的十进制小数表示为:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

其中 a_{ij} 是小于 10 的自然数. 则取 $x = 0.b_{11}b_{22}\cdots b_{kk}\cdots$, 使得 $b_{ii} \neq a_{ii}$, $i = 1, 2, \cdots$. (用到了选择公理) 则 $x \in (0,1)$ 但 $x \neq x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}^+$. 矛盾. □

2 第三周习题

2.1 向量的旋转

习题1: (a) $\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$, 从而方程组确定;

(b) 设 $\ell(a,b)$ 的长度为 r, 所求夹角为 γ, 则 $a^2 + b^2 = u^2 + v^2 = r^2$, 且 $(u,v)\cdot(a,b) = r^2\cos\gamma$. 计算可得 $\cos\gamma = \cos\theta$.

注: (1) 向量 (u,v) 逆时针旋转 θ 角得到向量 (a,b);

证明: 我们断言: 若向量 (u,v) 逆时针旋转得到向量 (a,b), 则 (u,v) 是本题所给方程组的解. 这是因为: 设向量 (u,v) 与 x 轴的夹角为 β, 则向量 (a,b) 与 x 轴的夹角为 $\theta + \beta$. 那么

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{a} &= \tan(\theta + \beta) \\
&= \frac{\tan\theta + \tan\beta}{1 - \tan\theta\tan\beta}.
\end{aligned}
$$

另外, $\tan\beta = \dfrac{v}{u}$, 代入上式整理得:

$$
\frac{b}{a} = \frac{\sin\theta\, u + \cos\theta\, v}{\cos\theta\, u - \sin\theta\, v}. \tag{1}
$$

下面计算 a^2+b^2 :

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=a^2(1+(\frac{b}{a})^2)\\&=a^2(1+(\frac{\sin\theta\,u+\cos\theta\,v}{\cos\theta\,u-\sin\theta\,v})^2)\quad(\text{代入 }(1))\\&=(\frac{a}{\cos\theta\,u-\sin\theta\,v})^2((\cos\theta\,u-\sin\theta\,v)^2+(\sin\theta\,u+\cos\theta\,v)^2)\\&=(\frac{a}{\cos\theta\,u+\sin\theta\,v})^2(u^2+v^2).\end{aligned}$$

由于向量 (a,b) 是由 (u,v) 旋转得到的, 所以它们模长相同, 即 $a^2+b^2=u^2+v^2$. 则根据上式:

$$(\frac{a}{\cos\theta\,u-\sin\theta\,v})^2=1$$

从而

$$a=\cos\theta\,u-\sin\theta\,v \text{ 或 } a=-\cos\theta\,u+\sin\theta\,v.$$

若 $a=-\cos\theta\,u+\sin\theta\,v$, 则 $b=-\sin\theta\,u-\cos\theta\,v$. 进一步可以改写成: $\begin{cases}a=\cos(\theta+\pi)\,u-\sin(\theta+\pi)\,v\\b=\sin(\theta+\pi)\,u+\cos(\theta+\pi)\,v\end{cases}$. 此时, 根据习题 1 的 (b), (u,v) 与 (a,b) 的夹角余弦值为 $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$, 故该情况舍去. 所以只能是:

$$a=\cos\theta\,u-\sin\theta\,v;$$
$$b=\sin\theta\,u+\cos\theta\,v.$$

从而断言得证. 由于方程组是确定的, 所以方程组的解 (u,v) 只能是 (a,b) 顺时针旋转 θ 角得到.

(2) 该线性方程组实际上对应复数乘法:

$$a+\mathrm{i}\,b=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(u+\mathrm{i}\,v).$$

将一个复数乘上 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 实际上就是将这个复数逆时针旋转 θ 角.

习题2: (a) 按自反性、对称性、传递性验证即可;

(b) 直接计算 $u^2+v^2=a^2+b^2$;

(c) 根据前面的注, $(e,f)\sim(c,d)$ 当且仅当 (c,d) 可以旋转到 (e,f), 这当然是一个等价关系.

注: 这里给出 (c) 的一个不考虑几何意义的纯代数的证明.

自反性: 证明 $(c,d)\sim(c,d)$. 取 $\theta=0$, 方程组化为:

$$\begin{cases}x=c\\y=d\end{cases}.$$

其解当然为 (c,d).自反性得证.

对称性: 假设 $(e,f)\ \sim (c,d)$, 要证 $(c,d)\sim(e,f)$. 实际上, 由于 $(e,f)\sim(c,d)$, 则存在$\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e &= \cos\alpha\, c - \sin\alpha\, d; \\ f &= \sin\alpha\, c + \cos\alpha\, d. \end{aligned}$$

可以用二阶行列式解出 (c,d) :

$$\begin{aligned} c &= \cos\alpha\, e + \sin\alpha\, f; \\ d &= -\sin\alpha\, e + \cos\alpha\, f. \end{aligned}$$

进一步改写:

$$\begin{aligned} c &= \cos(-\alpha)\, e - \sin(-\alpha)\, f; \\ d &= \sin(-\alpha)\, e + \cos(-\alpha)\, f. \end{aligned}$$

所以, 只要取 $\theta=-\alpha$, (e,f) 就是以 (c,d) 为右端项的方程组的解, 从而 $(c,d)\sim(e,f)$, 对称性得证.

传递性: 假设 $(e,f)\sim(c,d)$, $(c,d)\sim(g,h)$, 要证 $(e,f)\sim(g,h)$. 由 $(e,f)\sim(c,d)$, $(c,d)\sim(g,h)$ 知存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 使得以下关系成立:

$$e = \cos\alpha\, c - \sin\alpha\, d; \tag{2}$$

$$f = \sin\alpha\, c + \cos\alpha\, d. \tag{3}$$

并且

$$c = \cos\beta\, g - \sin\beta\, h; \tag{4}$$

$$d = \sin\beta\, g + \cos\beta\, h. \tag{5}$$

将式 (4), (5) 代入 (2), (3) 并整理化简, 得到关于 (e,f) 关于 (g,h) 的表达式:

$$\begin{aligned} e =& (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)g - (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)h = \cos(\alpha+\beta)\, g - \sin(\alpha+\beta)\, h; \\ h =& (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)g + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)h = \sin(\alpha+\beta)\, g + \cos(\alpha+\beta)\, h. \end{aligned}$$

从而取 $\theta=\alpha+\beta$, (g,h) 就是以 (e,f) 为右端项的方程组的解, 传递性得证.

2.2 映射的运算

习题*3*: (a) 证明: 设 $x_1,x_2\in A$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)$. 则 $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$. 由 $g\circ f$ 为单射知 $x_1=x_2$. 这说明 f 为单射;

(b) 证明: 任取 $y \in C$, 则由 $g \circ f$ 为满射知存在 $x \in A$, 使得 $y = g \circ f(x) = g(f(x))$, $f(x) \in B$. 故 g 为满射.

注: f 为单射当且仅当: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in A$.

补充: 关于映射的左逆与右逆.

定理 2.1 设 $f: A \to B$ 为映射.

(1) f 为单射当且仅当: $\exists h: B \to A$ 为映射, 使得 $h \circ f = i_A$;

(2) f 为满射当且仅当: $\exists h: B \to A$ 为映射, 使得 $f \circ h = i_B$.

证明: 充分性习题已证, 以下仅证必要性.

关于(1): 对任意的 $y \in B$, 取 $h(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), \text{ 若 } y \in f(A), \\ \text{任意指定, 若 } y \notin f(A)\,. \end{cases}$ 则 h 是 B 到 A 的映射. 容易验证 $h \circ f = i_A$.

关于(2): 对任意的 $y \in B$, 由于 f 为满射, 故 $f^{-1}(y)$ 非空. 对每一个 $y \in B$, 随意取定 $f^{-1}(y)$ 中的一个元素, 记为 $h(y)$(表示与 y 有关). 则 h 成为一个从 B 到 A 的映射, 且容易验证 $f \circ h = i_B$. □

注: (1) 说明单射有左消去性, (2) 说明满射有右消去性.

习题4: (a) 由于 $A_1, A_2 \subset A_1 \cup A_2$, 故 $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 反之, 任取 $y \in f(A_1 \cup A_2)$, 则存在 $x \in A_1 \cup A_2$, 使得 $y = f(x)$. 若 $x \in A_1$, 则 $y \in f(A_1)$; 若 $x \in A_2$, 则 $y \in f(A_2)$. 总之, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, 从而 $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f_(A_2)$;

(b) 由于 $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ 且 $A_1 \cap A_2 \subset A_2$, 从而 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. 当 f 单射时, 任取 $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, 则存在 $x \in A_1$, 使得 $y \in f(A_1)$. 而 $\in y \in f(A_2)$ 且 f 单射, 故只能是 $x \in A_2$, 从而 $x \in A_1 \cap A_2$. 这就表明 $y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$;

(c) 任取 $y \in f(f^{-1}(B'))$, 则存在 $x \in f^{-1}(B')$ 使得 $y = f(x)$. 由 $x \in f^{-1}(B')$ 知 $y \in B'$. 若 f 满射, 则任取 $y \in B'$, 存在 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 注意到 $y \in B'$, 故 $x \in f^{-1}(B')$, 从而 $y = f(x) \in f(f^{-1}(B'))$. □

注: (1) 本题关键在于: 证明集合相等即证明包含与反包含;

(2) 若 f 不是单射, 则 (b) 中等号不一定成立. 例如: $f(1) = 1, f(2) = f(3) = 2$. 则 $f(\{1,2\} \cap \{1,3\}) = \{1\}$, 而 $f(\{1,2\}) \cap f(\{1,3\}) = \{1,2\}$;

(3) 若 f 不是满射, 则 (c) 中等号不一定成立(反例?). (c) 有对偶命题: 设 A' 是 A 的一个子集, 则 $f^{-1}(f(A')) \supset A'$, 若 f 为单射, 则 $f^{-1}(f(A')) = A'$.

补充: 关于映射的运算:

(a) 设 $f: A \to B$ 是映射, B_1, B_2 是 B 的两个子集. 则:

(1) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

(b) 设 $f:\ A \to B,\ h:\ B \to C$ 为两个映射, $U \subset C$ 为 C 的子集. 则 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

感兴趣的同学可以自己证明一下, 作为集合与映射关系的练习.