第二次习题课.

2023.10.08　　505教室

13:30—14:20 — 15:10

15:20 — 16:10 — 17:00

回顾知识.

1. 实系数线性方程组

m个方程 n个未知数.

增广矩阵

相容的. 确定的.

☆ m=n时. 方程组系数的行列式.

方程组是确定的 ⟺ 其系数矩阵的行列式非零.

☆ 线性方程组的解集. 集合表示.

2. 映射

$$f: S \longrightarrow T$$
$$x \longmapsto y \quad 记\ y = f(x)$$

特殊映射.

(1). 恒同映射 (identity)

$$id_S: S \longrightarrow S$$
$$x \longmapsto x$$

(2). 嵌入. $S' \subseteq S$, $S' \neq \phi$

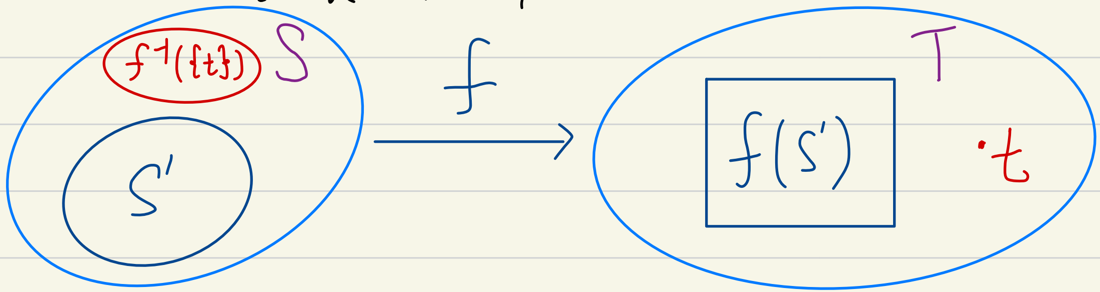
$$\begin{aligned} id_{S'}: S' &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

(3) 投影 (projection)

$$\begin{aligned} P_1: S \times T &\longrightarrow S \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

单射. 满射. 双射.

3. 像集和原像集



$$f^{-1}(T) = S.$$

纤维 (fibre): $f^{-1}(\{t\})$

4. 映射的复合. 映射的逆. 集合的势.

5. 等价关系：

$\sim$ 是非空集合 S 上的二元关系，如果

(i) 自反性：$\forall x \in S$，$x \sim x$.

(ii) 对称性：$\forall x, y \in S$ 且 $x \sim y$，则 $y \sim x$.

(iii) 传递性：$\forall x, y, z \in S$，$x \sim y$ 且 $y \sim z$，则 $x \sim z$.

则称 $\sim$ 是等价关系。$\square$

作业

1. 设 $\theta, a, b \in \mathbb{R}$. 考虑线性方程组:

$$\begin{cases} \cos\theta\ x - \sin\theta\ y = a \\ \sin\theta\ x + \cos\theta\ y = b \end{cases}$$

(a) 证明该方程组是确定的;

证: 方程组的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

其行列式: $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$

由命题 2.1 可知：该方程组是确定的.

(a) 证明该方程组是确定的;

(b) 设

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

如果 α 和 β 不全为零, 则记 $\ell(\alpha,\beta)$ 是点 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 与原点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的连线. 计算 $\ell(u,v)$ 和 $\ell(a,b)$ 的夹角, 其中 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 是上述方程组的解且 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解. 设 $\ell(u,v)$ 和 $\ell(a,b)$ 的夹角为 α.

$$\begin{cases} u = a\cos\theta + b\sin\theta \\ v = -a\sin\theta + b\cos\theta \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{u\cdot a + v\cdot b}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{a^2\cos\theta + b^2\cos\theta}{a^2+b^2} = \cos\theta.$$

所以 $\alpha = \min\begin{pmatrix} \theta \bmod \pi \\ \pi - \theta \bmod \pi \end{pmatrix}$

2. 设 $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$. 如果 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ 在以原点为圆心的某个圆上, 则称 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 有关系 R. 记为 $\mathbf{u}R\mathbf{v}$.

(a) 验证 R 是等价关系;

证:

1) 自反性: $\forall\, u \in S$. 则 u 在以原点为圆心的某个圆上, $u\,R\,u$.

2) 对称性: $\forall\, u, v \in S$. 若 $u\,R\,v$, 则 u, v 在同一个圆上, 因此 $v\,R\,u$.

3). 传递性: $\forall\, u, v, p \in S$ 若 $u\,R\,v$ 且 $v\,R\,p$

则 U, V, P 三点共圆. 因此 URP.

(b) 设 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 由习题 1(b) 给出. 说明 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 是否成立;

由1(b)可得: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 逆时针旋转 θ 所得.

所以 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 成立.

(c) 设 $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. 如果存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 是方程组

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = e \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = f \end{cases}$$

的解, 则称 $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 有关系 $\sim$. 证明: $\sim$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系.

证：由已知可得：

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{有关系} \sim \text{ 当且仅当}$$

$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 在以原点为圆心的某个圆上.

由 2(a) 可知：$\sim$ 是 R^2 上的等价关系.

3. 设 $f: A \to B$, $g: B \to C$ 是两个映射. 证明:

(a) 若 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射;

(b) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射.

证:

a) 思路: 对 $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 则 f 是单射.

对 $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. 由 $g \circ f$ 是单射 得.

$$g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$$

即: $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ 所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

故 f 是单射

b) 思路：对 $\forall c \in C$，$\exists b \in B$ 有 $g(b) = c$，则 g 是满射.

对 $\forall c \in C$，由 $g \circ f$ 是满足，则

$\exists a \in A$，有 $g \circ f(a) = c$，即 $g(f(a)) = c$

故 $\exists b \in B$，为 $b = f(a)$，有 $g(b) = c$，

因此 g 是满射.

4. 设 $f: A \rightarrow B$ 是映射, A_1, A_2 是 A 的子集, B' 是 B 的子集. 证明:

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, 且当 f 是单射时, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ 成立;

(c) $f(f^{-1}(B')) \subset B'$, 且当 f 是满射时, $f(f^{-1}(B')) = B'$ 成立.

证:

a) 思路: 互相包含.

i) $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$

$\Longleftrightarrow$ $\forall\ b \in f(A_1 \cup A_2)$, 有 $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

$\forall\ b \in f(A_1 \cup A_2)$, 则 $\exists\ a \in A_1 \cup A_2$, 有 $b = f(a)$

即 $a \in A_1$ 时 $b \in f(A_1)$ 或 $a \in A_2$ 时 $b \in f(A_2)$. 故

$b \in f(A_1) \cup f(A_2)$

ii) $f(A_1 \cup A_2) \supset f(A_1) \cup f(A_2)$

$\Longleftrightarrow \forall\, b \in f(A_1) \cup f(A_2)$，有 $b \in f(A_1 \cup A_2)$.

$\forall\, b \in f(A_1) \cup f(A_2)$，有 $b \in f(A_1)$ 或 $b \in f(A_2)$

当 $b \in f(A_1)$ 时 $\exists\, a \in A_1$ 有 $b = f(a) \in f(A_1)$

或当 $b \in f(A_2)$ 时 $\exists\, a \in A_2$ 有 $b = f(a) \in f(A_2)$

故 $\exists\, a \in A_1 \cup A_2$ 有 $b = f(a) \in f(A_1 \cup A_2)$.

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, 且当 f 是单射时, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ 成立;

i) 思路：$\forall b\in f(A_1\cap A_2)$，有 $b\in f(A_1)\cap f(A_2)$.

$\forall b\in f(A_1\cap A_2)$. 则 $\exists\, a\in A_1\cap A_2$ 有 $b=f(a)$.

即：$a\in A_1$ 且 $a\in A_2$

因此 $b=f(a)\in f(A_1)$ 且 $b=f(a)\in f(A_2)$

故 $b\in f(A_1)\cap f(A_2)$

ii) 只需证明 $f(A_1\cap A_2)\supset f(A_1)\cap f(A_2)$.

思路：$\forall b\in f(A_1)\cap f(A_2)$，有 $b\in f(A_1\cap A_2)$.

$\forall b\in f(A_1)\cap f(A_2)$ $\exists\, a\in A_1$，$a'\in A_2$ 有 $b=f(a)=f(a')$

∵ f 是单射 ∴ $a = a'$ 即 $\exists\, a \in A_1 \cap A_2$

有 $b = f(a) \in f(A_1 \cap A_2)$.

(c) $f\left(f^{-1}\left(B'\right)\right) \subset B'$, 且当 f 是满射时, $f\left(f^{-1}\left(B'\right)\right) = B'$ 成立.

∵ $f^{-1}(B') = \{ a \in A \mid f(a) \in B' \}$.

∴ $f(f^{-1}(B')) \subset B'$

现证: 当 f 是满射时. $f(f^{-1}(B')) \supset B'$.

即需证: 对 $\forall\, b \in B'$ 有 $b \in f(f^{-1}(B'))$.

∵ f 是满射

∴ 对 $\forall\, b \in B'$ $\exists\, a \in f^{-1}(B')$ 有 $b = f(a) \in f(f^{-1}(B'))$.

得证.