

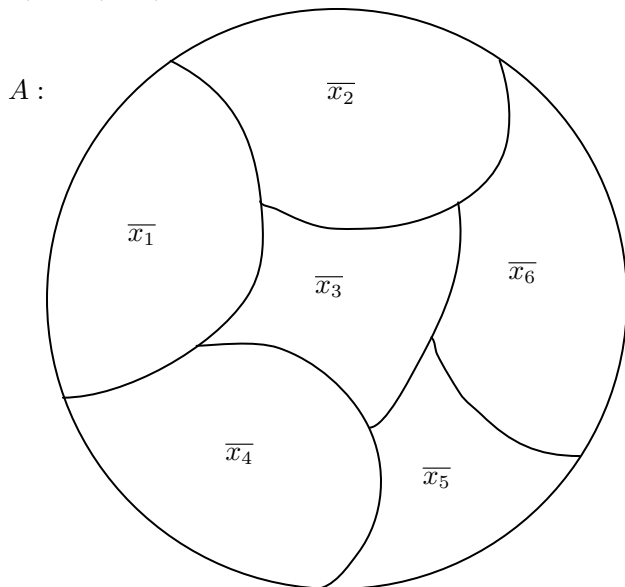
习题1:回忆: 设 $f: A \rightarrow B$ 为映射, 由 f 诱导的等价关系 $\sim_f$ 是指:

$$\forall x, x' \in A, x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

集合 A 被 $\sim_f$ 划分为若干等价类, 每个等价类由相互等价的元素构成. 若取 $x \in A$ 作为代表元, 则 x 所在的等价类为:

$$\bar{x} = \{x' \in A \mid f(x') = f(x)\}.$$

例如, 我们假设 f 的像集 $f(A) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ 只有 6 个元素, 并设 $f(x_i) = y_i, x_i \in A, i = 1, \dots, 6$. 那么:



如上图所示, A 就被划分成了 6 个等价类, f 在每个等价类上是常值映射.

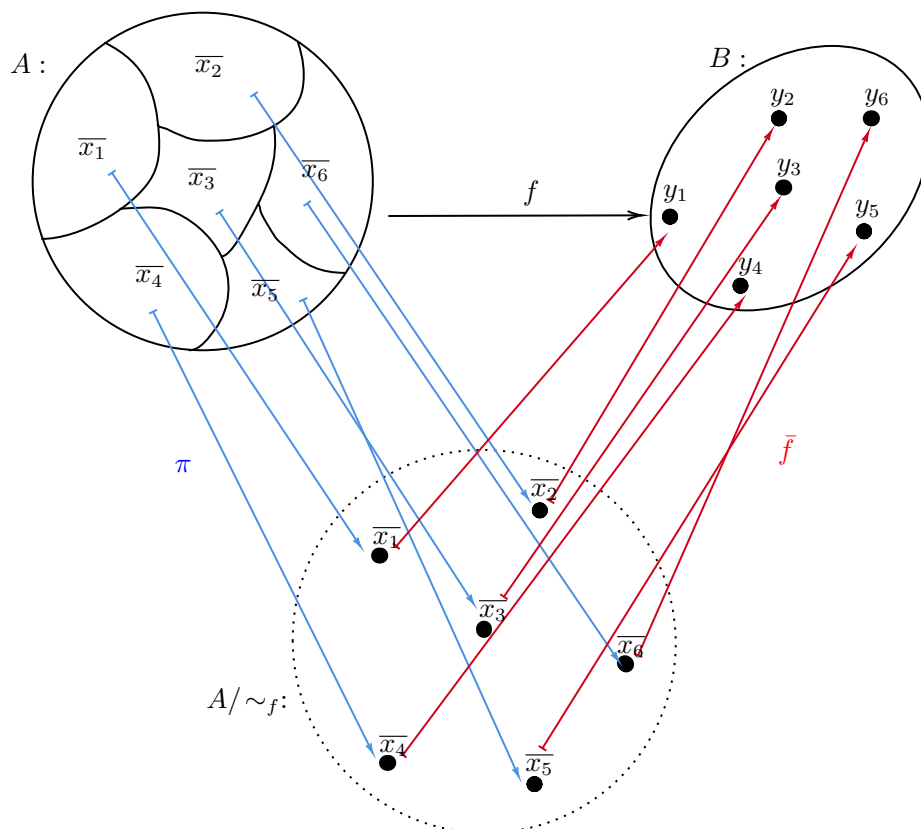
作商集 $A/\sim_f := \{\bar{x} \mid x \in A\}$, 即全体等价类构成的集合. 则我们有商映射:

$$\begin{aligned} \pi: A &\rightarrow A/\sim_f \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

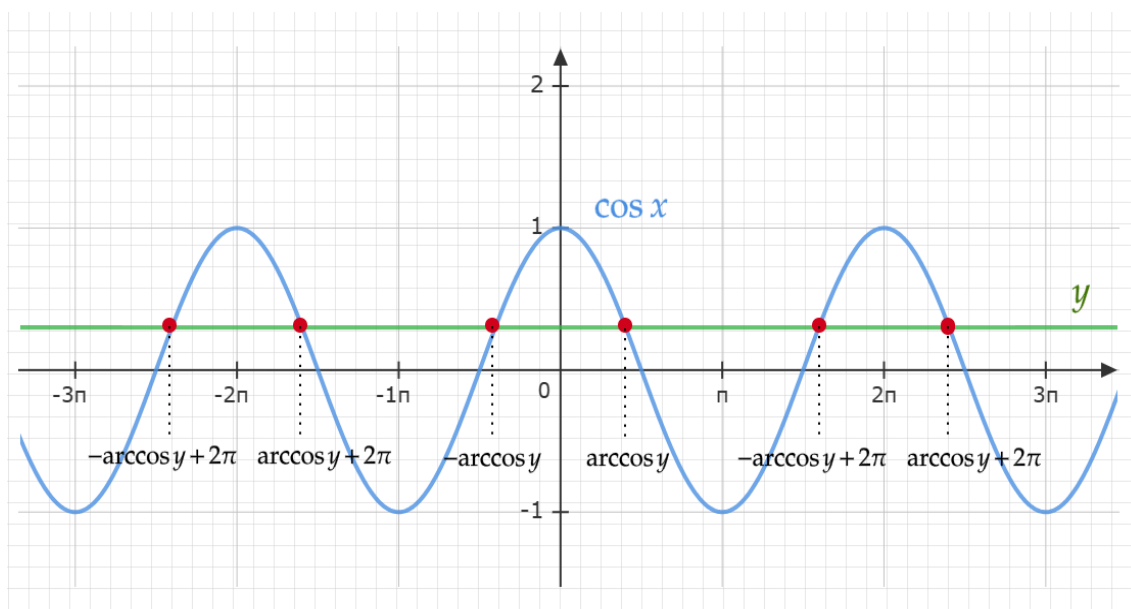
以及诱导映射:

$$\begin{aligned} \bar{f}: A/\sim_f &\rightarrow B \\ \bar{x} &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

可以验证: π 为满射, $\bar{f}$ 良定义且为单射, $f = \bar{f} \circ \pi$. 根据第二周习题 3(或者直接证明), 若 f 为满射, 则 $\bar{f}$ 为满射. 在上一个例子中, 商映射 π 就将 A 中每个元素映射到其所在的等价类, $\bar{f}$ 将 $\bar{x}_i$ 映射到 y_i , 如下图所示.



原题目: (1): 本题需要注意 y 是给定的. $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = y\}$. 对于给定的 y , $\arccos y \in [0, \pi]$, 若 $\cos x = y$, 则 $x = \arccos y + 2k\pi$ 或 $-\arccos y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 从而 $f^{-1}(\{y\}) = \{\arccos y + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos y + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



(2): 若取 $x \in \mathbb{R}$ 作为代表元, 其所在的等价类为:

$$\bar{x} = \{x' \mid \cos x' = \cos x\} = \{x' \mid x' = x + 2k\pi \text{ 或 } -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

从而 $\mathbb{R}/\sim_f = \{\bar{x} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(3): 商映射:

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}/\sim_f \\ x &\mapsto \bar{x}\end{aligned}$$

诱导映射:

$$\begin{aligned}\bar{f}: \mathbb{R}/\sim_f &\rightarrow [-1, 1] \\ \bar{x} &\mapsto \cos x\end{aligned}$$

另一个例子: 设 $S = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ 为单位圆周, 映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow S, x \mapsto (\cos x, \sin x)$, 我们描述其诱导的等价类和商映射. 若取 $x \in \mathbb{R}$ 为代表元, 则其所在的等价类:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{x' \in \mathbb{R} \mid f(x') = f(x)\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R} \mid (\cos x', \sin x') = (\cos x, \sin x)\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R} \mid x' = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

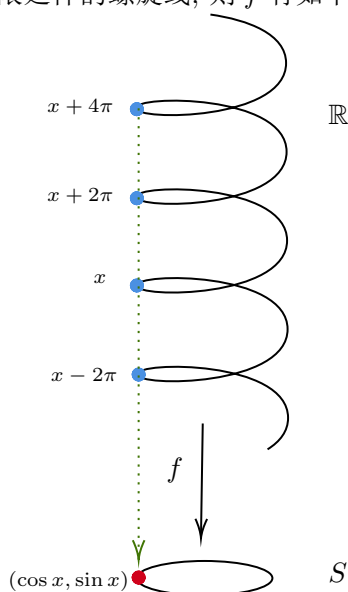
也就是一些实轴上间隔为 2π 的点. 商集 $\mathbb{R}/\sim_f = \{\bar{x} \mid x \in \mathbb{R}\}$, 商映射:

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}/\sim_f \\ x &\mapsto \bar{x}\end{aligned}$$

诱导映射:

$$\begin{aligned}\bar{f}: \mathbb{R}/\sim_f &\rightarrow S \\ \bar{x} &\mapsto (\cos x, \sin x)\end{aligned}$$

若把实数轴 $\mathbb{R}$ 视为一条向两端无限延伸的螺旋线, 则 f 有如下示意图:



即实数轴 $\mathbb{R}$ 一圈一圈地缠绕在圆周 S 上. 容易看出, f 是满射, 从而诱导映射 $\bar{f}$ 是从 $\mathbb{R}/\sim_f$ 到 S 的一个双射. 换句话说, 通过双射 $\bar{f}$, 商集 $\mathbb{R}/\sim_f$ “等同于” 圆周 S .

习题2: 一个集合上的等价关系和划分是一一对应的, 故集合的划分的个数就是其商集的个数.

2 元: 有 2 种划分;

3 元: 按划分成多少个集合讨论:

分成 1 个: 1 种划分;

分成 2 个: 只能分成 1 个 1 元素的集合和 1 个 2 元素集合, 即 “1+2”, 3 种划分;

分成 3 个: 只能分成 3 个 1 元素的集合, 即 “1+1+1”, 1 种划分.

共 5 种;

4 元: 作同样的讨论:

分成 1 个: 1 种划分;

分成 2 个: “1+3” 有 4 种, “2+2” 有 3 种;

分成 3 个: “1+1+2” 有 $C_4^2 = 6$ 种;

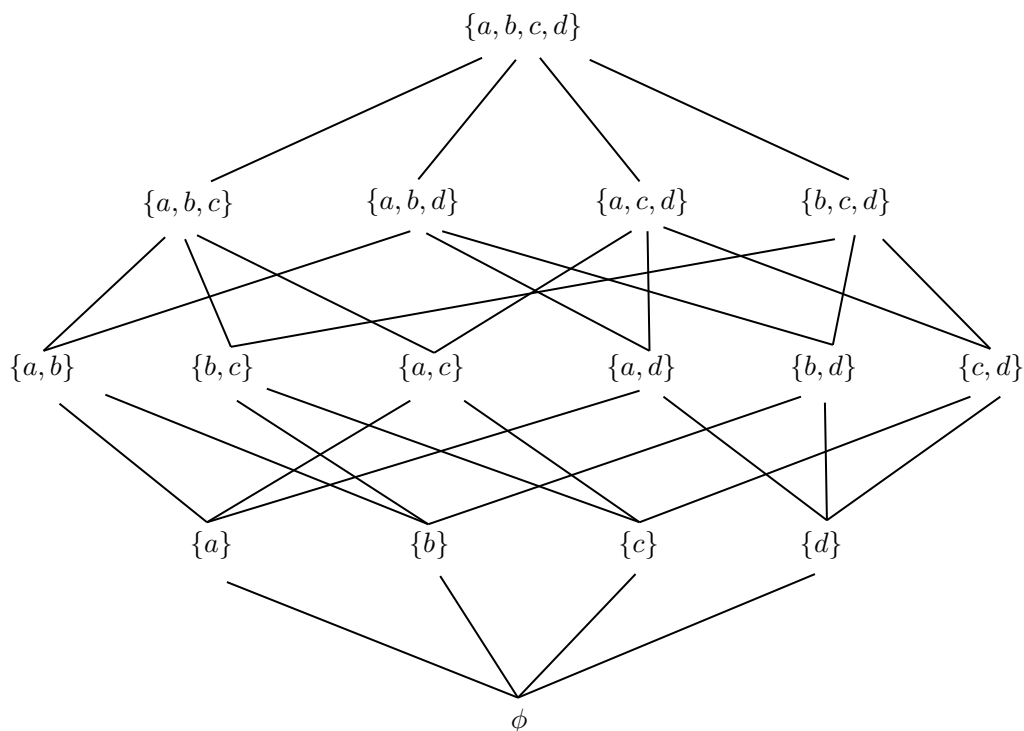
分成 4 个: “1+1+1+1” 有 1 种;

共 15 种.

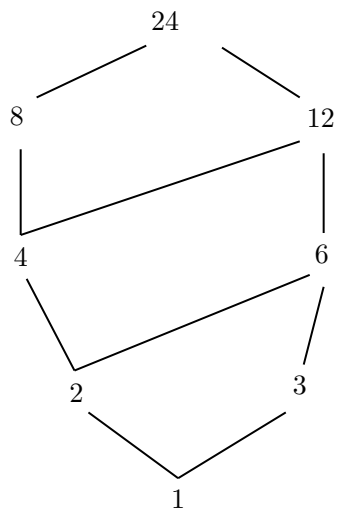
习题3: 要验证 “ $|$ ” 为偏序, 只要证明自反性、反对称性、传递性即可. 要说明 “ $|$ ” 不为全序, 则需要找到 $a, b \in \mathbb{Z}$, 使得 $a|b$ 与 $b|a$ 均不成立. 例如 $a = 2, b = 3$ 就符合要求.

(全序: 设 $\leq$ 是 S 上的偏序, 则 $\leq$ 为全序 $\Leftrightarrow \forall x, y \in S, x \leq y$ 或者 $y \leq x$ 成立.)

习题4: (1):



(2):



习题5: (1): 直接计算 $\pi = (1387)(264)(59)$, 所以 $\text{ord}(\pi) = \text{lcm}(4, 3, 2) = 12$. 利用穿衣脱衣规则以及 $(i_1 i_2 \cdots i_k)^{-1} = (i_k i_{k-1} \cdots i_1)$ 可得 $\pi^{-1} = (95)(462)(7831)$.

注: 也可以直接计算 π^{-1} , 但最好将 (123456789) 写在第一行, 也就是写成:

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 9 & 2 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2): 置换的乘积就是复合运算, 所以应从右向左计算. 计算结果为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$