第三次习题课

1. 设 $f(x) = \cos x$, 且定义域为 $\mathbb{R}$.

   (i) 任给 $y \in [-1, 1]$, 求 $f^{-1}(\{y\})$.

   (ii) 求由 f 诱导的等价关系 $\sim_f$ 的商集(等价关系: $x \sim_f x' \iff f(x) = f(x')$).

   (iii) 刻画上述等价关系诱导的商映射 π 和单射 $\bar{f}$.

解: (i) $\forall y \in [-1, 1]$,

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = y\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \arccos y + 2k\pi \text{ or } -\arccos y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

(ii) 一些等价类构成的集合.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{x} = \{x' \in \mathbb{R} \mid x' \sim_f x\}$

$$= \{x' \in \mathbb{R} \mid \cos x' = \cos x\}$$

$= \{x' \in \mathbb{R} \mid x' = x + 2k\pi \text{ or } x' = -x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

所以：$\mathbb{R}/\sim_f = \{\bar{x} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$= [0, \pi]$.

(iii). 商映射： $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim_f$

$x \longmapsto \bar{x} = \left\{x' \in \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} x' = x + 2k\pi \text{ or} \\ x' = -x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$.

单射： $\bar{f} : \mathbb{R}/\sim_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{x} \longmapsto f(x) = \cos x$.

2. 证明 2 元、3 元

3. 设 $|$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的整除关系, 即对 $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a|b$ 如果存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $b = ma$.
验证 $|$ 是偏序, 并举例说明 $|$ 不是全序.

不同商集个数 = 划分个数

以4元集合为例: $S=\{a, b, c, d\}$

分1组 $abcd$ 1种

分2组 2, 2分 $ab|cd$ $\frac{C_4^2}{2}=3$种

3, 1分 $abc|d$ $C_4^3=4$种

分3组 2, 1, 1分 $ab|c|d$ $C_4^2=6$种

分4组 $a|b|c|d$ 1种

$1+3+4+6+1$
$=15$种.

3. 设 $|$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的整除关系, 即对 $a, b \in \mathbb{Z}^+, a|b$ 如果存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $b = ma.$
验证 $|$ 是偏序, 并举例说明 $|$ 不是全序.

证明: 1) 自反性: $\forall\ a \in \mathbb{Z}^+$, $a|a \implies a \leq a$.

2) 反对称性: $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \leq b$, $b \leq a$

即 $a|b$ 且 $b|a$

$\implies \exists\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $b = m_1 a$, $a = m_2 b$

$\implies b = m_1 m_2 b \implies m_1 m_2 = 1 \implies m_1, m_2 = 1$

$\implies a = b$

3) 传递性：$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}^+$，$a \le b$，$b \le c$，

即：$a \mid b$，$b \mid c$。

$\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $b = m_1 a$，$c = m_2 b$

$\Rightarrow c = m_2 m_1 a \Longrightarrow a \mid c \Longrightarrow a \le c$

因此：$\mid$ 是偏序。

但 $\mid$ 不是全序（$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$，有 $a \le b$ 或 $b \le a$）

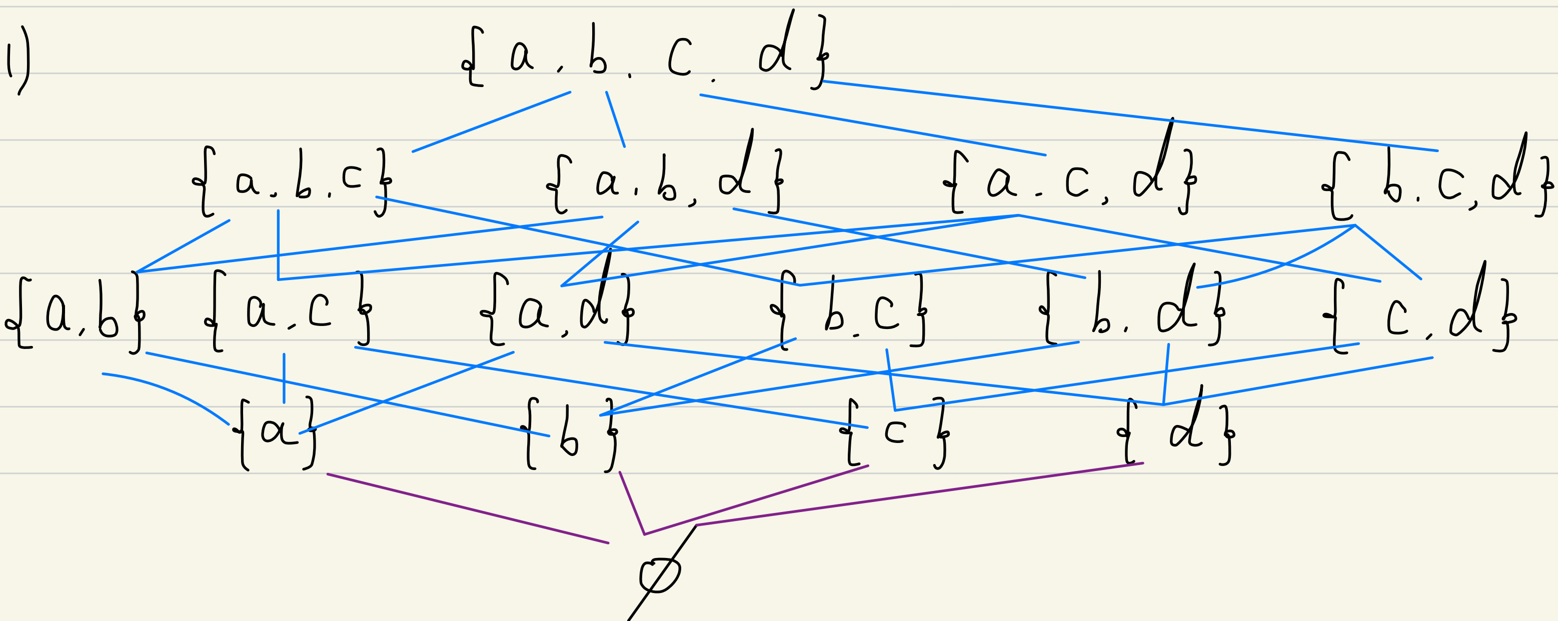
比如：4与5之间不存在整除关系，即 $4 \nmid 5$ 且 $5 \nmid 4$。

4. 画出下述偏序集的图解：

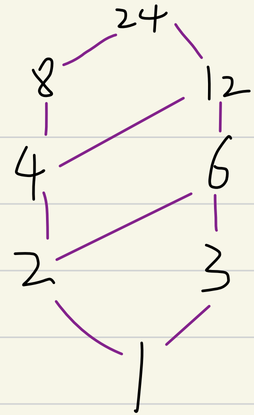
(1) 四元集合 $\{a, b, c, d\}$ 的所有子集组成的集合(偏序关系由集合的包含关系给出).

(2) 整数 24 的全体正因子的集合(偏序关系由整除给出).

(1)



(2)



5. (i) 求出置换

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 9 & 4 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

互不相交的循环分解、阶数和逆置换 π^{-1}.

(ii) 计算置换的乘积

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

解:

(i). $\pi = (1387)(264)(59)$

$\operatorname{ord}(\pi) = \operatorname{lcm}(4, 3, 2) = 12$

$\pi^{-1} = (7831)(462)(95)$

$= (1783)(246)(59)$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$