第四次习题课

2023.10.20. 505教室

13:30 — 14:20 — 15:10

15:20 — 16:10 — 17:00

回顾概念

1. 置换: σ τ

   ① 乘积

   ② $ord(\sigma)$

   ③ 循环, 对换

   ④ 奇. 偶 置换

表示 $\begin{cases} \text{两行} \\ \text{互不相交循环之积} \end{cases}$

$\boxed{\text{一个长度为k的循环}}$

2. 整数的算数

   最大公因子 、 最小公倍数

   gcd　　　　　lcm

   扩展的辗转相除法.

记 τ

1. 判断以下置换的奇偶性:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $(12)(34)(56)\cdots(\underline{2023}\,\underline{2024})$;

(c) $\sigma_1\sigma_2$. 其中 $\sigma_1 \in S_n$ 为奇置换, $\sigma_2 \in S_n$ 为偶置换.

(a) $\tau = (125)(368)(47) = (52)(51)(86)(83)(47)$

5个对换，因此是奇置换.

$\left(\epsilon_\tau = (-1)^{2+2+1} = -1\right.$, 故 τ 是奇置换$\left.\right)$

(b) 共有1012个对换，故为偶置换

(c) 奇置换

2. 设 $\sigma \in S_n$ 为置换.

(a) 若 $\operatorname{ord}(\sigma)$ 为奇数, 证明 σ 为偶置换;

(b) 当 $\operatorname{ord}(\sigma)$ 为偶数时, σ 是否一定为奇置换? 给出证明或举出反例.

证明:

(a) σ 写成互不相交的循环 $\tau_1\tau_2\cdots\tau_k$ 之积.

$\because \operatorname{ord}(\sigma)=\operatorname{lcm}(\operatorname{ord}(\tau_1),\cdots,\operatorname{ord}(\tau_k))$ 为奇数.

$\therefore \operatorname{ord}(\tau_1),\cdots,\operatorname{ord}(\tau_k)$ 都为奇数

由推论6.26.得:

$$\varepsilon_\sigma=(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(\operatorname{ord}(\tau_i)-1)}$$

$$=1$$ 故 σ 为偶置换

(b) 不一定为奇置换.

$$\sigma=(12)(34)$$

$\varepsilon_\sigma=(-1)^{1+1}=1$. 为偶置换

(注: 恒同映射 e 的阶为1)

3. (a) 验证公式: $(ij)(jk)=(ijk)$; $(ij)(kl)=(ikj)(ikl)$, 其中 i,j,k,l 为正整数;

(b) 证明: 任何一个偶置换都可以写成一些三轮换的乘积. 这里的三轮换是指长度为 3 的循环.

(a) 方法一:

证明 对 $\forall\, a\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有

$$(ij)(jk)(a)=(ijk)(a)$$

$$(ij)(kl)(a)=(ikj)(ikl)(a)$$

方法二：

由置换乘积

$$(ij)(jk)=(jki)=(ijk)$$

$$(ikj)(ikl)=\underbrace{(ik)(kj)(ik)}(kl)$$
$$=(ij)(kl)$$

(b). 证明：设 σ 是任意偶置换

则 $\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k-1}\tau_{2k}$

其中 τ_i 都是对换。

对任意一对 $\tau_i\ \tau_{i+1}$ $(1\leq i\leq 2k-1)$ 有下面三种情况

(i) 互不相交，即 $\tau_i=(ab)$，$\tau_{i+1}=(cd)$

由 (a) 得 $\tau_i\tau_{i+1}=(acb)(acd)$

(ii) 相交，即 $\tau_i=(ab)$ $\tau_{i+1}=(cd)$

由 (a) 得 $\tau_i\tau_{i+1}=(abc)$

(iii) 相等 即 $\tau_i=\tau_{i+1}=(ab)$. $\tau_i\tau_{i+1}=e$.

(忽略不写)

因此 σ 可以写成一些三轮换的乘积.

4. (a) 求 $\gcd(51,62), \operatorname{lcm}(51,62)$, 并求两个整数 u, v, 使得 $51u + 62v = \gcd(51,62)$;

(b) 给定正整数 m, 求两个整数 u, v, 使得 $51u + 62v = m$.

(a)

扩展的辗转相除法 $\gcd(51,62)=1$

$u = -17$, $v = 14$

满足 $51 \times (-17) + 62 \times 14 = 1$

(b) $m \times 51 \times (-17) + m \times 62 \times 14 = m$

$\Rightarrow u = -17m$, $v = 14m$.

5. 设 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}^+$. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公因子是指能够整除每个 a_i 的最大正整数, 记为 $\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 证明:

(a) $\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \gcd(\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}), a_n)$;

(b) 存在整数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$, 使得 $u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots + u_na_n = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

证明:

(a)

设 $g = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

则:

$$g \mid \gcd(a_1, \cdots, a_{n-1})$$

不妨设 $\gcd(a_1, \cdots, a_{n-1}) = kg$.

$$a_n = \alpha g$$

则 $RHS = g \cdot \gcd(k, \alpha)$

只需证 $\gcd(k, \alpha) = 1$

假设 $\gcd(k, \alpha) = m > 1$

有 $mg \mid \gcd(a_1, \cdots, a_{n-1})$

$$mg \mid a_n$$

这与 g 是 $a_1, \cdots, a_n$ 的最大公约数矛盾.

所以 $\gcd(k, \alpha) = 1$. 证毕!

(b) 数学归纳

当 $n=2$ 时，结论成立

假设 $n=k-1$ 时成立，即

存在 $u_1, \cdots, u_{k-1}$，使得

$$u_1 a_1 + \cdots + u_{k-1} a_{k-1} = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}).$$

证 $n=k$ 时成立

由 $n=2$ 知：$\exists\, t_1, t_2$ 使得

$$t_1 \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}) + t_2 a_k = \gcd(\gcd(a_1, \cdots, a_{k-1}), a_k)$$

即：

$$t_1 (u_1 a_1 + \cdots + u_{k-1} a_{k-1}) + t_2 a_k = \gcd(a_1, \cdots, a_k)$$

故 $n=k$ 时成立.

得证.