第六周习题课

李文桥

2023 年 10 月 26 日

1 向量的线性相关性

回忆: 关于向量的线性相关与线性无关: 设向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性相关是指:

$$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ 不全为零, 使得 } \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}.$$

向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性无关是指:

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

所以, 一个向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性相关与否, 取决于关于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 的方程组

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

是否有非零解.

习题1: 直接计算, 结果为 $\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$.

习题2: (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ 使得:

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}.$$

此即关于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的方程组: $\begin{cases} 5\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$. 考虑该方程组对应的系数矩阵:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4r_1+r_2,-3r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{27}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{27}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以看出方程组有非零解, 从而向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 线性相关.

(2) 过程同 (1), 只需考虑系数矩阵: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

注意到 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}r_1+r_4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由此看出方程一定有非零解, 从而向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 线性相关.

习题3: 书写步骤时严格按照定义. 考虑向量组 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ 的线性相关性, 就是考虑:

$$\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 + \alpha_3\boldsymbol{w}_3 = \mathbf{0}$$

是否有非零解. 将已知条件代入上式, 整理得:

$$(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3)\boldsymbol{v}_1 + (2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3)\boldsymbol{v}_2 + (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3)\boldsymbol{v}_3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3)\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ 线性无关知: $\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$. 于是考虑该方程组对应的系数矩阵, 并化为阶梯形:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 可以看出方程组是确定的, 从而只有零解, 故向量组 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ 线性无关.

习题4: *(必要性)*:

设实数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 使得

$$\alpha_1(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) + \alpha_2(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3) + \alpha_3(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}.$$

整理得:

$$(\alpha_2 + \alpha_3)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)\boldsymbol{v}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 线性无关, 故:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

考虑其对应的系数矩阵, 通过化阶梯型判断有无非零解, 或者直接求解该方程组. 最终可得 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, 这说明 $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ 线性无关.

(充分性):

作代换: $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, 由条件知 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$ 线性无关. 可以反解出:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_3-\boldsymbol{w}_1);\\ \boldsymbol{v}_2&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_3-\boldsymbol{w}_2);\\ \boldsymbol{v}_3&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_3).\end{aligned}$$

若实数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 使得:

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0},$$

代入 $\boldsymbol{v}_i$ 关于 $\boldsymbol{w}_i$ 的表达式并整理得:

$$(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)\boldsymbol{w}_1+(\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2)\boldsymbol{w}_2+(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\boldsymbol{w}_3=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$ 线性无关知:

$$\begin{cases}\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_3-\alpha_2=0\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}.$$

可以判断出 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, 从而 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 线性无关.

习题5: 若存在实数 $\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 使得:

$$\alpha\boldsymbol{w}+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0},$$

则代入 $\boldsymbol{w}=a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k$ 并整理:

$$\alpha a_1\boldsymbol{v}_1+(\alpha_2+\alpha a_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(\alpha_k+\alpha a_k)=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k$ 线性无关知:

$$\begin{cases}\alpha a_1=0\\ \alpha_2+\alpha a_2=0\\ \vdots\\ \alpha_k+\alpha a_k=0\end{cases}.$$

由于 $a_1\neq 0$, 所以从第一个方程可以得出 $\alpha=0$, 进而从后 $k-1$ 个方程得到 $\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$, 于是 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k$ 线性无关.

2 子空间

回忆: 关于子空间的交、和与直和.

设 $U_i,\ i=1,2,\cdots,k$ 以及 U,V 均为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

1. $\bigcap_{i=1}^{k} U_k$ 也为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间;
2. 定义 $U_1 + U_2 + \cdots + U_k := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \,|\, \boldsymbol{v}_i \in U_i,\ i = 1, 2, \cdots, k\}$, 称为 $U_1, \cdots, U_k$ 的和.
3. 称 $U + V$ 是直和, 如果 $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. 记为 $U \oplus V$.

关于直和: 以下命题等价:

(1) $U + V$ 是直和;

(2) $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U + V)$;

(3) 对任意的 $\boldsymbol{w} \in U + V$, 存在唯一的 $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{v} \in V$ 使得 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$; (向量的分解唯一性)

(4) 若存在 $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{v} \in V$ 使得 $\mathbf{0} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$; (零向量的分解唯一性)

命题 2.1 *设 $U+V$ 为直和, 则任取 U 的一组基 $S = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s\}$ 和 V 的一组基 $T = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_t\}$, 都有 $S \cup T$ 为 $U + V$ 的一组基.*

证明: 易见 $U + V = \langle S \cup T \rangle$, 只要证明向量组 $S \cup T$ 线性无关. 设实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 使得

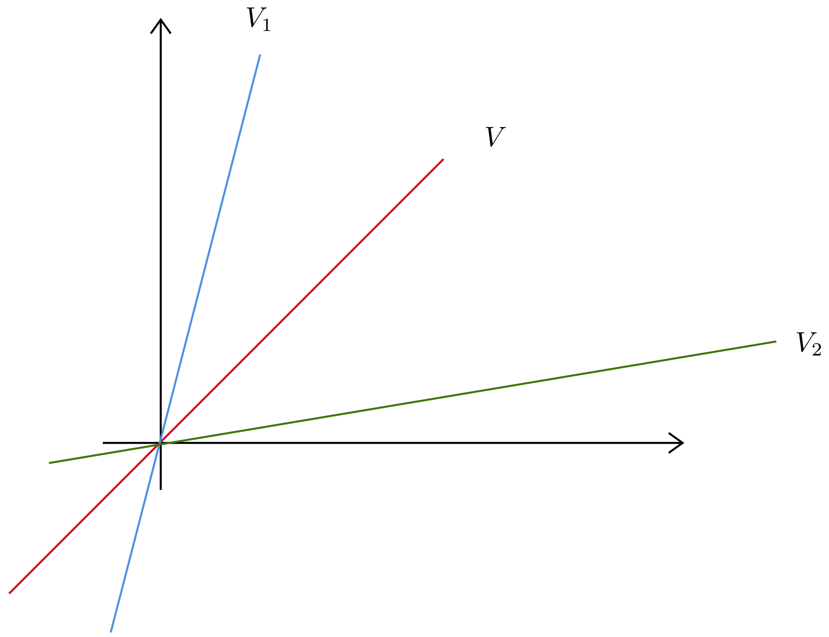
$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u}_s + \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_t \boldsymbol{v}_t = \mathbf{0},$$

移项得:

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u}_s = -\beta_1 \boldsymbol{v}_1 - \cdots - \beta_t \boldsymbol{v}_t$$

这说明 $\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_s \boldsymbol{u}_s \in U \cap V$, 从而为 $\mathbf{0}$. 根据 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s$ 为基可知 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$. 同理, $\beta_1 = \cdots = \beta_t = 0$. 故 $S \cup T$ 线性无关. □

习题6: (1)(2) 两问都只需考虑平面上三条不同的过原点的直线即可.



如上图所示, $V \cap V_1$, $V \cap V_2$ 都是 $\{\mathbf{0}\}$.

注: 本题 (2) 意在说明: 直和补不唯一.

补充习题1: (a) 若向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_{k-1}+\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_1$ 是否线性无关?

(b) 若向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_{k-1}+\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_1$ 是否线性相关?

解:

(a) 设实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 满足:

$$\alpha_1(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\alpha_2(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)+\cdots+\alpha_k(\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_1)=\mathbf{0},$$

整理得:

$$(\alpha_k+\alpha_1)\boldsymbol{v}_1+(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(\alpha_{k-1}+\alpha_k)\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性无关知:

$$\begin{cases} \alpha_k+\alpha_1=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}+\alpha_k=0 \end{cases}$$

可知 $\alpha_1=(-1)^{k-1}\alpha_k$ 且 $\alpha_1=-\alpha_k$. 于是, 当 k 为奇数时, 方程组只有零解, 从而所考虑的向量组线性无关. 当 k 为偶数时, 方程组有非零解, 比如 $\alpha_i=(-1)^i$, $i=1,2,\cdots,k$, 故此时所考虑的方程组线性相关;

(b) 从 (a) 的求解过程可以看出, 无论 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 是否线性无关, 只要 k 为偶数, 就有 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_{k-1}+\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_1$ 线性相关. 以下考虑 k 为奇数的情形:
由于 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性相关, 故存在 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 不全为零, 使得:

$$\beta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\beta_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}.$$

由 (a) 可知: 当 k 为奇数时, 方程组:

$$\begin{cases} \alpha_k+\alpha_1=\beta_1 \\ \alpha_1+\alpha_2=\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}+\alpha_k=\beta_k \end{cases}$$

存在唯一解, 因为其对应的齐次线性方程组只有零解. 由 β_i 不全为零知 α_i 不全为零. 则:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\alpha_2(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)+\cdots+\alpha_k(\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_1) =& \alpha_k+\alpha_1)\boldsymbol{v}_1+(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(\alpha_{k-1}+\alpha_k)\boldsymbol{v}_k \\ =& \beta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\beta_k\boldsymbol{v}_k \\ =& \mathbf{0}. \end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_{k-1}+\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_1$ 线性相关.

补充习题2: (a) 若向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 分别添加 m 维分量构成的向量组 $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_k'$ 是否一定线性无关?

(b) 若向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 分别添加 m 维分量构成的向量组 $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_k'$ 是否一定线性相关?

解:

(a) 一定线性无关. 设实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 满足:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1' + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2' + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k' = \mathbf{0},$$

这是一个关于 α_i 的齐次线性方程组, 一共 $m+n$ 个方程. 如果只关注前 n 个方程, 其实就是:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性无关可知 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, 从而 $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots, \boldsymbol{v}_k'$ 线性无关;

(b) 不一定. 比如 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 它们线性相关, 但若令 $\boldsymbol{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'$ 线性无关.