第五次习题课

2023.10.27 505

13:30 — 14:20 — 15:10

15:20 — 16:10 — 17:00

回顾概念：

1. n维列向量（坐标）空间.

$$\mathbb{R}^{n\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. 线性组合，线性相关和线性无关.

定义 1.3 设 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

则称 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$（在 $\mathbb{R}$ 上）的线性组合.

定义 1.8 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

则称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$（在 $\mathbb{R}$）上线性相关. 否则, 我们称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$（在 $\mathbb{R}$）上线性无关.

线性相关:

$\Leftrightarrow$ $(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组有非零解.

$\Leftrightarrow$ $(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k)$ 化为阶梯型矩阵后非0行个数小于 k

$\Leftrightarrow$ $A=(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k)$. $\mathrm{rank}(A)<k$

1. 计算线性组合 $3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$, 其中

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

解:

$$3\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 - 5\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3\times 3 + 4\times 4 - 5\times 2 \\ 3\times 1 + 4\times 1 - 5\times(-1) \\ 3\times 4 + 4\times 5 - 5\times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2. 判断下述向量组是否线性无关

(1)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(1)

解. 设 $A=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$. 由 Gauss 消去法可知

$$A=\begin{pmatrix}5&3&8\\4&3&1\\3&2&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}5&3&8\\0&\frac{3}{5}&-\frac{27}{5}\\0&\frac{1}{5}&-\frac{9}{5}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}5&3&8\\0&\frac{3}{5}&-\frac{27}{5}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解
故: $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ 线性相关.

(2). 类似 (略).

3. 给定一个线性无关的向量组 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$. 判断向量组

$\mathbf{w}_1=3\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_2=2\mathbf{v}_1+5\mathbf{v}_2+3\mathbf{v}_3+2\mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_3=3\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3+3\mathbf{v}_4$.

是否线性相关.

解: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1\vec{w_1}+\alpha_2\vec{w_2}+\alpha_3\vec{w_3}=\vec{0}$.

则: $(3\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)\vec{v_1}+(2\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3)\vec{v_2}+$

$$(\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3)\vec{v_3}+(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)\vec{v_4}=\vec{0}$$

又: 向量组 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, $\vec{v_4}$ 线性无关

$$\therefore \begin{cases} 3\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0 \\ 2\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3=0 \\ \alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0 \end{cases}$$

其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

由 Gauss 消去法可知：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{11}{3} & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & \frac{14}{11} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是上式齐次线方程组只有平凡解. 即 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

故 $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$ 线性无关.

4. 证明: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ 线性无关当且仅当 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ 线性无关.

证明: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, 使得:

$$\alpha_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2) + \alpha_2(\vec{v}_1+\vec{v}_3) + \alpha_3(\vec{v}_2+\vec{v}_3) = \vec{0}$$

即: $(\alpha_1+\alpha_2)\vec{v}_1 + (\alpha_1+\alpha_3)\vec{v}_2 + (\alpha_2+\alpha_3)\vec{v}_3 = \vec{0}$.

故: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性无关 当且仅当

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2+\alpha_3 = 0 \end{cases} \text{当且仅当} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

即: $\vec{v}_1+\vec{v}_2$, $\vec{v}_1+\vec{v}_3$, $\vec{v}_2+\vec{v}_3$ 线性无关.

5. 设 $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关. 再设

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k,$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ 且 $a_1 \neq 0$. 证明: $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关.

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得：

$$\alpha_1 \vec{w} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \vec{v_k} = \vec{0}.$$

又 $\because \vec{w} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_k \vec{v_k}$

$\therefore \alpha_1 a_1 \vec{v_1} + (\alpha_1 a_2 + \alpha_2)\vec{v_2} + \cdots + (\alpha_1 a_k + \alpha_k)\vec{v_k} = \vec{0}$

又 $\because \vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ 线性无关.

$$\therefore \begin{cases} \alpha_1 a_1 = 0 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_k + \alpha_k = 0 \end{cases}$$

又 $\because a_1 \neq 0$

$\therefore \alpha_1 = 0,$

$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0$

故 $\vec{w}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_k}$ 线性无关.

3. 子空间.

例 1.18 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. 则 $\{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 则 $\{\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.

(1). 子空间的交与和

(2). 子空间的生成 $\langle S \rangle$

其中 S是$\mathbb{R}^n$的非空子集

(3). 子空间的直和

定义 1.36 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, 则称 $U + W$ 是直和. 记为 $U \oplus W$.

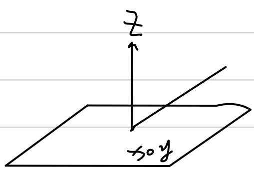
6. 设 V, V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 举例说明

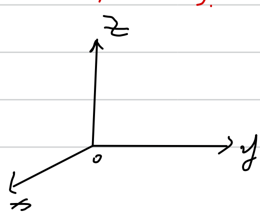
(1) $V \cap (V_1 + V_2) = V \cap V_1 + V \cap V_2$ 一般不成立.

(2) $V + V_1$ 是直和, $V + V_2$ 也是直和且 $V + V_1 = V + V_2$, 但 $V_1 \neq V_2$.

(可证明: $V_1 \subset V$ 时, "=" 成立)

(2)





eg:

(1).
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

证明 $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$.

" $\subset$ " 显然

" $\supset$ " $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

其中 $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in V_2$.

$\therefore$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_1 + V_2$ 即 $\mathbb{R}^2 \subset V_1 + V_2$

$$V \cap (V_1 + V_2) = V \cap \mathbb{R}^2 = V$$

$$\#$$

$$V \cap V_1 + V \cap V_2 = \{\bar{0}\} + \{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$$