第七周习题课

李文桥

2023 年 11 月 3 日

1　极大线性无关组、基与维数

回忆: 设 $S \subset \mathbb{R}^n$, 且 S 中含有非零向量. 则 S 中有极大线性无关组, 设 $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m \in S$ 是 S 的一个极大线性无关组.

1. $\langle S\rangle := \{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k \,|\, \alpha_i \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_i \in S,\ i = 1, \cdots, k.\}$
2. 设 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k \in S$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 可扩充成 S 的一个极大线性无关组(可扩充性);
3. 设 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_l \in S$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_l$ 是 S 的一个极大线性无关组当且仅当 $m = l$ (等势性);
4. 关于基底: 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 向量组 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k \in U$, 则:
   (i) 若任意 U 中的向量能被 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 唯一地线性表出, 则称 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 为 U 的一组基;
   (ii) U 的基就是 U 的一组极大线性无关组;
   (iii) 若 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 线性无关, 且能线性表出 U 中所有向量, 则该向量组为 U 的一组基;
   (iv) 若 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 线性无关且 $k = \dim(U)$, 则 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 是 U 的一组基.
5. S 的极大线性无关组就是 $\langle S\rangle$ 的基底. 所以任何一组 S 中的线性无关向量可扩充为 $\langle S\rangle$ 的一组基底(基扩充定理);
   注: 若 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为子空间, 则 $\langle U\rangle = U$.
6. 设 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$, 则 $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k\rangle) \leq k$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性无关;
7. 设 U, W 为两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 且 $U \subset W$; 则 $\dim(U) \leq \dim(W), \dim(U) = \dim(W)$ 当且仅当 $U = W$.
8. 设 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k \in U$ 且 $k \geq \dim(U)$, 则 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ 线性相关;
9. 设 U, V 为两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则:
$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V).$$

习题1: 即求 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 的一个极大线性无关组. 将这三个向量按列排成矩阵:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{化为阶梯型}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
可以看出 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 线性相关. 而 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 互不平行, 所以任意两个向量线性无关, 从而可取 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 为一个极大线性无关组, 进而成为基底. 该子空间维数为 2.

习题2: (a) (假设我们还没有学对偶定理)直观理解, 子空间 W 由一个方程决定, 所以应该有两个自由度, 维数应为 2. 首先容易找到 W 中的两个向量 $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 由于 $\boldsymbol{w}_1$ 与 $\boldsymbol{w}_2$ 不平行, 所以它们线性无关. 另一方面, 任意的 $\boldsymbol{w} \in W$, 设 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -p-q \\ p \\ q \end{pmatrix}$, 则:

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -p-q \\ p \\ q \end{pmatrix} = q\boldsymbol{w}_1 + p\boldsymbol{w}_2.$$

这说明 $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$. 从而 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ 是 W 的一组基底, $\dim(W) = 2$;

(b) 本题需要证明两方面: 1. $W + V$ 是直和; 2. $W + V = \mathbb{R}^3$.

先证 $W + V$ 是直和, 也就是证明 $W \cap V = \{\mathbf{0}\}$. 任取 $\boldsymbol{f} \in W \cap V$, 则由 $\boldsymbol{f} \in V$ 知存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$. 又由 $\boldsymbol{f} \in W$ 知:

$$\lambda + \lambda + 2\lambda = 0.$$

从而 $\lambda = 0$, $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. 这说明 $W \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

再证 $W + V = \mathbb{R}^3$. 由于 $W \subset \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^3$, 从而 $W + V \subset \mathbb{R}^3$. 易见 $\dim(V) = 1$, $\boldsymbol{v}$ 就是 V 的基. 由维数公式可得:

$$\dim(W + V) = \dim(W) + \dim(V) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

故 $W + V = \mathbb{R}^3$.

从而 $W \oplus V = \mathbb{R}^3$;

(c) 由上节习题课, 或者直接验证可知 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ 线性无关, 从而是 $W \oplus V = \mathbb{R}^3$ 的一组基;

(d) 法一: 根据条件列出方程组: $\begin{cases} x - y - z = a \\ x + z = b \\ 2x + y = c \end{cases}$. 直接解方程, 或将三个式子相加即得 $x = \dfrac{a+b+c}{4}$;

法二: 注意到 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ 与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 作点乘为 0, 所以对 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 用 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 作点乘得:

$$a + b + c = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\boldsymbol{v} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4x.$$

得 $x = \dfrac{a+b+c}{4}$.

习题3. 就是“回忆”中的第 6 点. 取 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_t$ 的一个极大线性无关组, 记为 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$, 则该向量组就成为 V 的一组基, 从而 $d = m \leq t$. 若 $t = d$, 则 $\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_m$ 就是 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_t$, 从而线性无关; 若 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_t$ 线性无关, 则它们是 V 的一组基, 从而 $t = \dim(V) = d$.

2 矩阵的秩

回忆: 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 其行空间记为 V_r, 列空间记为 V_c.

1. 定义 A 的行秩为 $\dim(V_r)$, 列秩为 $\dim(V_c)$;
2. 初等行变换不改变行空间, 且不改变列秩; 初等列变换不改变列空间, 且不改变行秩;
3. A 的行秩等于 A 的列秩, 将其称为 A 的秩;
4. A 的行秩就是 A 行向量的极大线性无关组的个数, 列秩就是 A 列向量的极大线性无关组的个数.
5. $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$; 设 $B \in \mathbb{R}^{m\times s}$, 则 $\mathrm{rank}(A, B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$;
6. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^t)$.

习题4. (a) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -54 & -30 & 15 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

可以看出秩为 2.

(b) 法一: 对该矩阵做初等行变换. 所以分以下情形:

(1) $a = b = c = d = 0$, 则秩为 1;

(2) a, b, c, d 不全为零. 比如 a 不为零, 则可以做初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & e & e \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{c}{a}r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & e & e \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

可以看出, 若 $ad - bc = 0$, 则该矩阵秩为 2, 否则秩为 3.

一般地, 我们可以通过行列的置换把 a, b, c, d 中的非零元换到第二行第二列的位置, 做初等行变换. 计算可知, 无论那种情况, 都有: 若 $ad - bc = 0$, 则该矩阵秩为 2, 否则秩为 3.

法二: 该矩阵的秩至少为 1. 当 $a = b = c = d = 0$ 时, 该矩阵秩为 1. 当 a, b, c, d 不全为零时, 该矩阵秩为 3 当且仅当 (a, b) 与 (c, d) 线性无关. 所以我们只需要求出 (a, b) 与 (c, d) 线性无关的条件就可以了. 而这等价于: $\begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$ 只有零解, 进而等价于 $ad - bc \neq 0$. 所以, 当 $a = b = c = d = 0$ 时, 矩阵秩为 1; 当 a, b, c, d 不全为零时, 若 $ad - bc = 0$, 则矩阵秩为 2; 若 $ad - bc \neq 0$, 则矩阵秩为 3.

补充习题1: (2020 秋期中考试 T6) 设 $k > 1, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 且存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 不全为零, 使得:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}.$$

(i) 证明: $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle) < k$;

(ii) 若存在实数 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 使得:

$$\beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},$$

且

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \beta_1 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix} = 2,$$

证明: $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle) < k - 1$.

(iii) (推广) 设 $s \in \mathbb{N}^+, 0 < s < k$. 若存在实数 β_{ij}, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le k$, 使得对任意的 $i = 1, \cdots, s$,

$$\beta_{i1} \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_{ik} \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},$$

且矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{s1} & \cdots & \beta_{sk} \end{pmatrix}$ 满秩, 证明: $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle) < k - s$.

解: (iii) 注意到 $s + 1 \le k$, 故矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{s1} & \cdots & \beta_{sk} \end{pmatrix}$ 满秩说明它的行向量线性无关. 考虑 k 个未知数的齐次线性方程组:

$$x_1 \boldsymbol{v}_1 + x_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}.$$

设其解空间为 V. 由条件, 题给矩阵的每个行向量都是该方程组的一个解, 并且它们线性无关, 所以 $\dim(V) \ge s + 1$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k) = k - \dim(V) < k - s$. 这说明矩阵 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$ 的列秩小于 $k - s$, 也就说明 $\dim(\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle) < k - s$.

补充习题2: 设 $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_m$, $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 且 $U_0 = V_0 = \{\boldsymbol{0}\}$, $U_m = V_m$. 证明:

(i) $m \le n$;

(ii) 设有 t 个下指标 i 使得 $U_i + V_i \subsetneq U_{i+1} + V_{i+1}$, 则:

$$m - \lfloor \frac{\dim(U_m)}{2} \rfloor \le t \le \dim(U_m).$$

解:

(i) 由 $U_i \subsetneq U_{i+1}$ 知 $\dim(U_i) < \dim(U_{i+1})$. 所以:

$$n \ge \dim(U_m) \ge \dim(U_{m-1}) + 1 \ge \cdots \ge \dim(U_0) + m = m.$$

(ii) $U_i + V_i \subsetneq U_{i+1} + V_{i+1}$ 当且仅当 $\dim(U_i + V_i) < \dim(U_{i+1} + V_{i+1})$. 同 (i) 可证 $t \le \dim(U_m + V_m) = \dim(U_m)$.

另一方面, 由维数公式,

$$\begin{aligned}
\dim(U_i+V_i) &= \dim(U_i)+\dim(V_i)-\dim(U_i\cap V_i);\\
\dim(U_{i+1}+V_{i+1}) &= \dim(U_{i+1})+\dim(V_{i+1})-\dim(U_{i+1}\cap V_{i+1}).
\end{aligned}$$

从而$U_i+V_i \subsetneq U_{i+1}+V_{i+1}$ 当且仅当:

$$\dim(U_{i+1})-\dim(U_i)+\dim(V_{i+1})-\dim(V_i) > \dim(U_{i+1}\cap V_{i+1})-\dim(U_i\cap V_i).$$

所以, 当 $\dim(U_{i+1}\cap V_{i+1})-\dim(U_i\cap V_i)\le 1$ 时, $U_i+V_i \subsetneq U_{i+1}+V_{i+1}$. 设有 x 个指标 i 使得 $\dim(U_{i+1}\cap V_{i+1})-\dim(U_i\cap V_i)\ge 2$, 则:

$$\dim(U_m)=\dim(U_m\cap V_m)\ge 2x+\dim(U_0\cap V_0)=2x.$$

可知 $x \le \lfloor\frac{\dim(U_m)}{2}\rfloor$. 也就是说, 至少有 $m-\lfloor\frac{\dim(U_m)}{2}\rfloor$ 个指标 i 使得 $\dim(U_{i+1}\cap V_{i+1})-\dim(U_i\cap V_i)\le 1$. 从而命题得证.