第六次习题课

2023.11.3

知识点：

2 子空间的基底和维数

1) S 极大线性无关组 T. $T \subset S$

①定义: i) T 中的向量线性无关　ii) $\forall \vec{v} \in S$, $\vec{v} \in \langle T \rangle$.

② 性质: 可扩充性，等势性.

2) 子空间 U 的一组基 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_d\}$.

①定义: $\forall \vec{u} \in U$, 存在唯一的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, 使得

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_d \vec{u}_d.$$

$\Longleftrightarrow$: $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_d\}$ 是 U 的极大线性无关组.

定理 2.12 *(基扩充定理)* 设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ 是子空间 U 中线性无关的向量. 则 U 有一组基包含 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

3) 维数.

命题 2.14 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间且 $U \subset W$. 则 $\dim(U) \leq \dim(W)$. 进而, $U = W$ 当且仅当 $\dim(U) = \dim(W)$.

注: 这里有条件 $U \subset W$.

重点:

命题 2.15 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间. 则

$$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W).$$

3. 矩阵的秩.

定理 3.6 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 A 的行秩等于它的列秩.

0) 行满秩, 列满秩.

1). 如果只求矩阵的秩, 做初等行(或列)变换都可以.

2). 如果已知矩阵要求其行(列)向量的一组极大线性无关组, 做行(列)初等变换(但不交换行(列)). 为了化简完之后好找相应位置所对应的原矩阵中的向量.

1. 设向量 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix}$. 求 $\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\rangle$ 的一组基.

解.

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\begin{pmatrix}1&3&-5\\2&2&2\\3&1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&-4&12\\0&-8&24\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&-4&12\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\because$ 以矩阵 $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解. 故 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性相关.

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&0\end{pmatrix}.$$

$\because$ 以矩阵 $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组只有平凡解.

故 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关.

$\therefore$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 是 $\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle$ 的一组基.

2. 设向量 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $V=\{\lambda\boldsymbol{v}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$, 且 $W=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+z=0\}$. 则 V,W 都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

(a) 求 W 的维数与一组基;

解.

(a). $\because W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$

$\therefore \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\in W$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\in W$

以 $\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组只有平凡解.

故 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 线性无关.

$\because$ 对 $\forall\ \vec{w}\in W$, $\vec{w}$ 可表示为 $\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}$, 其中 $y, z\in\mathbb{R}$.

$\therefore \vec{w}=\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}=-y\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+(-z)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\therefore \vec{w}\in\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ 即 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 为 W 的极大线性无关组

$\therefore \dim(W)=2$. $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 是 W 的一组基.

(b) 证明 $W\oplus V=\mathbb{R}^3$;

$\boxed{\text{证明思路}}$: i) $W+V=\mathbb{R}^3$ ii) 和为直和.

证: $W+V\subset\mathbb{R}^3$ 显然.

现证: $\mathbb{R}^3\subset W+V$

对 $\forall\ \vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. 令 $a_1, a_2, a_3\in\mathbb{R}$ 满足

$$a_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

即: $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=u_1 \\ -a_1+a_3=u_2 \\ -a_2+2a_3=u_3 \end{cases}$ 其增广矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ -1 & 0 & 1 & u_2 \\ 0 & -1 & 2 & u_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & u_1+u_2 \\ 0 & -1 & 2 & u_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & u_1+u_2 \\ 0 & 0 & 4 & u_1+u_2+u_3 \end{array}\right)$$

故该方程有唯一解. 因此 $\vec{u} \in W+V$

即 $\mathbb{R}^3 \subset W+V$ $\therefore$ $W+V=\mathbb{R}^3$

$3=\dim(W+V)=\dim(W)+\dim(V)=2+1$

$\therefore$ $W \oplus V=\mathbb{R}^3$.

(c) 将 (a) 问中所得的 W 的基记为 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, 证明: $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

由(b)可得 对 $\forall$ $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, 存在唯一的

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$,

使得 $\vec{u}=a_1\vec{w}_1+a_2\vec{w}_2+a_3\vec{v}$. 故

$\{\vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(d) 设 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 则存在唯一的实数 x, y, z, 使得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}_1 + z\boldsymbol{w}_2$. 求 x.

$x = \dfrac{a+b+c}{4}$.

3. 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\dim(V) = d$, 且 V 中有 t 个向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_t$ 使得 $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_t \rangle$. 证明: $t \geq d$, 且 $t = d$ 当且仅当 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_t$ 线性无关.

证.

1) 设 A 是向量组 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_t}$ 中的一个极大线性无关组. 则 A 是 V 的一组基.

因此. $d = |A| \leq t$ $\therefore$ $t \geqslant d$

2) $t = d \iff A = \{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_t}\}$

$\iff \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_t}$ 线性无关.

4. (a) 求 $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

秩为 2.

(b) 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. 求 $\begin{pmatrix} 1 & e & e \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ 的秩.

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & e & e \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

① a, b, c, d 全为 0, 秩为 1.

② 否则, 即至少有一个不为 0. i) $ad - bc \neq 0$ 时. 秩为 3
ii) $ad - bc = 0$ 时. 秩为 2