第八周习题课

李文桥

2023 年 11 月 22 日

1 矩阵的秩

回忆: 现在我们有两种观点去认识矩阵的秩:

1. 进行初等行列变换后, 矩阵的非零行(非零列)的个数;
2. 矩阵行(列)空间的维数, 或者说矩阵的行(列)向量组的极大线性无关组所包含的向量个数.

学习行列式之后, 我们还有另外一种观点. 求矩阵的秩时, 我们往往要灵活地转换使用以上两种观点.

习题1: 我们分别使用两种观点证明本题:

初等行列变换的角度.

(a) 设 $\operatorname{rank}(A) = R_A$, $\operatorname{rank}(C) = R_C$, 则 A 可通过初等行列变换化为:

$$A \xrightarrow{\text{初等行列变换}} \begin{pmatrix} E_{R_A} & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{1}$$

同样地, C 可通过初等行列变换化为:

$$C \xrightarrow{\text{初等行列变换}} \begin{pmatrix} E_{R_C} & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{2}$$

对矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$ 的前 m 行 n 列作初等行列变换不会影响到右下角的 C, 且对其后 s 行 k 列作初等行列变换不会影响到左上角的 A. 所以我们可以通过初等行列变换将其化为:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_A} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} E_{R_C} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

容易看出其秩为 $R_A + R_C$.

(b) 同 (a), 我们分别对矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 的前 m 行 n 列和后 s 行 k 列作初等行列变换, 使得左上角的 A 与右下角的 C 对应地有变换 (1), (2). 此时, 原矩阵化为:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_A} & O \\ O & O \end{pmatrix} & \bar{B} \\ O & \begin{pmatrix} E_{R_C} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

已经能够看出, 该矩阵前 R_A 行和从第 $m+1$ 行到第 $m+R_C$ 行所构成的向量组线性无关, 所以该矩阵的秩 $\geq R_A + R_C$.

行空间的角度.

(a) 设 $\mathrm{rank}(A) = R_A$, $\mathrm{rank}(C) = R_C$. 不妨设 A 的前 R_A 行 $\overrightarrow{A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_{R_A}}$ 构成 A 的行向量组的极大线性无关组, C 的前 R_C 行 $\overrightarrow{C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_{R_C}}$ 构成 C 的行向量组的极大线性无关组. 容易看出: $(\overrightarrow{A_1}, \boldsymbol{O}_{1\times k}), \cdots, (\overrightarrow{A_{R_A}}, \boldsymbol{O}_{1\times k}), (\boldsymbol{O}_{1\times n}, \overrightarrow{C_1}), (\boldsymbol{O}_{1\times n}, \overrightarrow{C_{R_C}})$ 线性无关, 实际上是矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$ 的行向量的极大线性无关组. 所以该矩阵的秩为 $R_A + R_C$.

(b) 同样地, 设 $\mathrm{rank}(A) = R_A$, $\mathrm{rank}(C) = R_C$. 不妨设 A 的前 R_A 行 $\overrightarrow{A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_{R_A}}$ 构成 A 的行向量组的极大线性无关组, C 的前 R_C 行 $\overrightarrow{C_1}, \cdots, \overrightarrow{C_{R_C}}$ 构成 C 的行向量组的极大线性无关组. 那么容易证明: $(\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{B_1}), \cdots, (\overrightarrow{A_{R_A}}, \overrightarrow{B_{R_A}}), (\boldsymbol{O}_{1\times n}, \overrightarrow{C_1}), (\boldsymbol{O}_{1\times n}, \overrightarrow{C_{R_C}})$ 线性无关. 所以矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 行空间的维数 $\geq R_A + R_C$, 也即该矩阵的秩 $\geq R_A + R_C$.

习题2: 设 A, B 的行数为 m. 对矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix}$ 作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{前 } m \text{ 行的 } -2 \text{ 倍对应加到后 } m \text{ 行}} \begin{pmatrix} A & B \\ O & -7B \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{后 } m \text{ 行倍乘} -\frac{1}{7}} \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{后 } m \text{ 行的 } -1 \text{ 倍对应加到前 } m \text{ 行}} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

结合习题 1 的 (a), 我们有 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

补充: 子矩阵的秩.

设矩阵 $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m' \leq m$, $n' \leq n$. 取定 F 的 m' 行和 n' 列, 由处于这些行以及列的元素所构成的 $m' \times n'$ 矩阵称为 F 的子矩阵. 例如: $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,那么取 F 的第 $1, 3$ 行和 $2, 3$ 列所构成的子

矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

命题 1.1 任意矩阵的秩不小于其子矩阵的秩.

证明*:*

设 $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 有子矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m'\times n'}$, 则可以通过行列置换将 A 调整至 F 的左上角. 于是我们不妨设:

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 $B \in \mathbb{R}^{m'\times(n-n')}$, $C \in \mathbb{R}^{(m-m')\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{(m-m')\times(n-n')}$. 由于 $V_c \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \subseteq V_c \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 我们有:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \leq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

同样地, 由于 $V_r(A) \subseteq V_r \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, 我们有:

$$\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}.$$

于是 $\operatorname{rank}(A) \leq \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \leq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(F)$. $\square$

例 1.2 证明 $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ 以及 $\operatorname{rank}(A\,B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

证明*:* 习题已证 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 若作初等行列变换:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}$$

注意到 $A+B$ 是 $\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}$ 的一个子矩阵, 所以 $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$;

若作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}$$

注意到 $(A\,B)$ 是 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}$ 的一个子矩阵, 所以 $\operatorname{rank}(A\,B) \leq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. $\square$

注: 利用维数公式证明秩的等或者不等关系也是常用技巧. 思考如下问题:

例 1.3 设 A, B, C 是具有相同行数的矩阵, 证明:

$$\mathrm{rank}(A\,B) + \mathrm{rank}(B\,C) + \mathrm{rank}(C\,A) \geq \frac{2}{3}(\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(C)) + \mathrm{rank}(A\,B\,C).$$

留作练习.

2 线性方程组的解结构

回忆: 设 L 为一个线性方程组, 其增广矩阵为 $B = \big(A\,|\,\boldsymbol{b}\big)$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. 设以 A 作为系数矩阵的齐次线性方程组为 H, $\boldsymbol{\gamma}$ 为 L 的一个解(若解存在).

1. L 相容当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$; L 确定当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = n$;
2. 若 L 相容, 则 $\mathrm{sol}(L) = \boldsymbol{\gamma} + \mathrm{sol}(H)$;
3. L 确定当且仅当 H 确定;
4. $\dim(\mathrm{sol}(H)) + \mathrm{rank}(A) = n$; (对偶定理)
5. 求解方程组: 高斯消元法化阶梯型.

习题3: 写出系数矩阵: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$, 化为阶梯型:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可以看出矩阵的秩为 2, 解空间的维数为 $4-2=2$. 这里, 我们将回代过程也用矩阵来操作:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将第二行代入第一行, 也就是用第二行将第二列的元素全消掉, 这样我们得到一个更简单的阶梯型, 称为最简阶梯型. 取 $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, 容易看出一个解为 $(8, -6, 1, 0)$; 取 $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, 一个解为 $(-7, 5, 1, 0)$, 这两个解线性无关, 构成解空间的一组基.

习题4: 写出增广矩阵: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right)$.

做初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & | & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & | & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & | & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & | & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & | & -6 \\ 0 & \frac{\lambda}{2}-4 & 9-\frac{3\lambda}{2} & 10-2\lambda & | & 11-\frac{5\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & | & 5 \\ 0 & \frac{\lambda}{2}-4 & 9-\frac{3\lambda}{2} & 10-2\lambda & | & 11-\frac{5\lambda}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & | & -4 \\ 0 & \lambda-8 & 0 & 2\lambda-16 & | & 4\lambda-32 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

若 $\lambda = 8$, 则系数矩阵和增广矩阵秩均为 2, 齐次部分解空间维数为 2, 一个解为 $(-2, 0, 3, 0)$, 齐次部分解空间的一组基为 $(\frac{1}{2}, 1, 0, 0,), (1, 0, -2, 1)$;

若 $\lambda \neq 8$, 则系数矩阵和增广矩阵秩均为 3, 齐次部分解空间维数为 1. 继续化简:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & | & -4 \\ 0 & \lambda-8 & 0 & 2\lambda-16 & | & 4\lambda-32 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

容易看出: $(0, 4, 3, 0)$ 方程组的一个解, $(0, -2, -2, 1)$ 为齐次部分解空间的一组基.

3 线性映射与矩阵

回忆:

1. 线性映射的定义;
2. 线性映射保持线性相关性;
3. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为线性映射, 定义 $\ker(\phi) := \phi^{-1}(\mathbf{0})$, $\mathrm{im}(\phi) := \phi(\mathbb{R}^n)$, 它们分别为 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ 的子空间;
4. $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$; (对偶定理)
5. 设 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的一组向量, 则存在唯一的线性映射 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 使得 $\phi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 换句话说, 线性映射被一组基下的像唯一确定;
6. 取定标准基后, 矩阵和线性映射一一对应, 即 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n}$;
7. 通过线性映射的加法, 数乘和复合定义矩阵的加法, 数乘和乘法;

8. 取定标准基后, 设 ϕ 对应的矩阵为 A, 则:

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

习题5: 按照定义检验即可, 只有 (ii) 不是线性映射, 它不保持数乘, 也不保持加法. 下面以 (iii) 为例, 检验其为线性映射.

任取 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t) =& \phi((\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)^t) \\ =& (\lambda x_1, \lambda x_1 + \lambda x_2, \cdots, \lambda x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda x_n)^t \\ =& \lambda(x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^t \\ =& \lambda\phi((x_1, x_2, \cdots, x_n)^t)\end{aligned}$$

保持数乘.

任取 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t,\ (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&\phi((x_1, x_2, \cdots, x_n)^t + (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t) = \phi((x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)^t) \\ =& (x_1 + y_1, (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), \cdots, (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n))^t \\ =& (x_1 + y_1, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), \cdots, (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n))^t \\ =& (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^t + (y_1, y_1 + y_2, \cdots, y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^t \\ =& \phi((x_1, x_2, \cdots, x_n)^t) + \phi((y_1, y_2, \cdots, y_n)^t).\end{aligned}$$

保持加法, 所以 ϕ 为线性映射.

注: 写出 (i)(iii) 对应的矩阵:

$$\text{(i)}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

补充1: 置换矩阵. 设 $\sigma \in S_n$, $\phi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})^t$. 容易验证 ϕ 为线性映射, 且对应的矩阵为:

$$\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\ a_{ij} = \begin{cases} 1, & \sigma(i) = j; \\ 0, & \sigma(i) \neq j. \end{cases}$$

该矩阵每行每列只有一个元素是 1, 其余是 0.

补充2: 核空间升链.

设 $\phi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ϕ^k 表示 ϕ 复合 k 次. 我们有:

命题 3.1 *(1)* $\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \cdots \subseteq \ker(\phi^k) \subseteq \cdots$;

(2) 存在 $k \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\ker(\phi^k) = \ker(\phi^{k+1})$;

(3) 若正整数 k 使得 $\ker(\phi^k) = \ker(\phi^{k+1})$, 则 $\ker(\phi^{k+1}) = \ker(\phi^{k+2})$.

证明*:* 只证明 (3). 任取 $\boldsymbol{v} \in \ker(\phi^{k+2})$, 则 $\phi^{k+2}(\phi) = \mathbf{0}$. 则

$$\phi^{k+1}(\phi(\boldsymbol{v})) = \phi^{k+2}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}.$$

从而 $\phi(\boldsymbol{v}) \in \ker(\phi^{k+1}) = \ker(\phi^k)$, 故:

$$\phi^{k+1}(\boldsymbol{v}) = \phi^{k+1}(\phi(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0}.$$

从而 $\boldsymbol{v} \in \ker(\phi^{k+1})$. 这说明 $\ker(\phi^{k+1}) = \ker(\phi^{k+2})$. $\square$

推论 3.2 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则存在 $k \in \mathbb{N}^+$, $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^{k+2}) = \cdots$.