

第七次习题课

2023. 11. 10

概念复习.

1. 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(线性组合, 线性相关和线性无关).

2. 子空间 $U \subset \mathbb{R}^n$

$\vec{x} + U$

线性流形

(交与和, 直和

子空间的生成, 基底, 维数)

3. 矩阵的秩.

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$V_c(A)$: A 的列空间: $\langle \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n \rangle$

$V_r(A)$: A 的行空间: $\langle \vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m \rangle$

$$\text{rank}(A) = \dim(V_r(A)) = \dim(V_c(A))$$

注: $V_c(A)$ 与 $V_r(A)$ 不一定相同.

例 3.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times k}$. 令

$$(A, B) = (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+k)}.$$

证明: $\text{rank}((A, B)) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明. 设 $C = (A, B)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(s)}$; $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(k)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(t)}$. 则矩阵 C 的列向量在

$$\underline{V = \langle \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(s)}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(t)} \rangle}$$

中. 于是, $V_c(C) \subset V$ (第二章第一讲命题 1.25). 故 $\text{rank}(C) \leq \dim(V) \leq s + t$. $\square$

另证. 注意到 $V_c(C) = V_c(A) + V_c(B)$. 由子空间的维数公式可知:

$$\begin{aligned} \dim(V_c(C)) &= \dim(V_c(A) + V_c(B)) \\ &= \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)) - \dim(V_c(A) \cap V_c(B)) \\ &\leq \dim(V_c(A)) + \dim(V_c(B)). \end{aligned}$$

故 $\text{rank}(C) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. $\square$

作业:

1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times k}$. 证明:

$$(i) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O_{m \times k} \\ O_{s \times n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C).$$

$$(ii) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ O_{s \times n} & C \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C).$$

证:

$$(i) \text{ 证 } E = \begin{pmatrix} A \\ O_{s \times n} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} O_{m \times k} \\ C \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} E & F \end{pmatrix}$$

$$\text{则: } \operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(C)$$

(ii) $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ O_{s \times n} & C \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C).$

由 E, F 矩阵的特点.

$$V_c(E) \cap V_c(F) = \{\vec{0}\}. \text{ 进一步, 由维数公式得}$$

$$\dim(V_c(D)) = \dim(V_c(E) + V_c(F))$$

$$= \dim(V_c(E)) + \dim(V_c(F)) - \dim(V_c(E) \cap V_c(F))$$

$$= \dim(V_c(E)) + \dim(V_c(F))$$

$$\text{故: } \operatorname{rank}(D) = \operatorname{rank}(E) + \operatorname{rank}(F)$$

$$= \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C) \text{ 原式成立.}$$

$$(ii) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ O_{s \times n} & C \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C).$$

设 $\operatorname{rank}(A) = R_A$, $\operatorname{rank}(C) = R_C$,

法一:

我们分别对矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 的前 m 行 n 列和后 s 行 k 列作初等行列变换, 使得左上角的 A 与右下角的 C 对应地有变换 (1), (2). 此时, 原矩阵化为:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{R_A} & O \\ O & O \end{pmatrix} & \bar{B} \\ O & \begin{pmatrix} E_{R_C} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

已经能够看出, 该矩阵前 R_A 行和从第 $m+1$ 行到第 $m+R_C$ 行所构成的向量组线性无关, 所以该矩阵的秩 $\geq R_A + R_C$.

法二:

同样地, 设 $\operatorname{rank}(A) = R_A$, $\operatorname{rank}(C) = R_C$. 不妨设 A 的前 R_A 行 $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_{R_A}$ 构成 A 的行向量组的极大线性无关组, C 的前 R_C 行 $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_{R_C}$ 构成 C 的行向量组的极大线性无关组. 那么容易证明: $(\vec{A}_1, \vec{B}_1), \dots, (\vec{A}_{R_A}, \vec{B}_{R_A}), (O_{1 \times n}, \vec{C}_1), (O_{1 \times n}, \vec{C}_{R_C})$ 线性无关. 所以矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 行空间的维数 $\geq R_A + R_C$, 也即该矩阵的秩 $\geq R_A + R_C$.

2. 提示: 初等行变换得到 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 利用 (i) 得证

4. 秩与线性方程组.

定理4.1 设 L 是以矩阵 $B = (A | \vec{b}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组.

(i) L 相容 $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

(ii) L 确定 $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$

(注: $V_c(A) \subset V_c(B) \implies \text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$)

定理4.6 (对偶定理, 方程组版)

设 H 是以 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系数矩阵的 齐次线性方程组, 则

$$\dim(\text{sol}(H)) + \text{rank}(A) = n$$

推论: 设 L 是以 $B = (A | \vec{b}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组, 如果 L 相容, 则

$$\dim(\text{sol}(L)) + \text{rank}(A) = n$$

作业.

3. 计算下列齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

解空间的一组基.

解. 该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$$

通过初等行变换得

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是, $\text{rank}(A) = 2$. $\dim(\text{sol}(H)) = 4 - 2 = 2$

原方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 得 $x_2 = -6, x_1 = 8$. 记 $\vec{v}_1 = (8, -6, 1, 0)^t$

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_2 = 5, x_1 = -7$. 记 $\vec{v}_2 = (-7, 5, 0, 1)^t$.

故 $\text{sol}(H)$ 的一组基为 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

4. 求出下列线性方程组 L

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

与参数 λ 的值对应的解流形.

解: 该方程组的增广矩阵

$$B = (A | \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

通过初等行变换得

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ \lambda-8 & 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda=8$ 时, $\text{rank}(B) = \text{rank}(A) = 2$.

$$\dim(\text{sol}(L)) = 4 - 2 = 2.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 5 + x_2 - 4x_4 \\ -x_3 = -3 + 2x_4. \end{cases}$$

令 $x_2 = x_4 = 0$, 得到 $x_3 = 3$, $x_1 = -2$. 记 $\vec{v} = (-2, 0, 3, 0)^t$

则 $\vec{v}$ 是 L 的一个特解.

以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组等价于

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = x_2 - 4x_4 \\ -x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

令 $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, 得 $x_3 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$. 记 $\vec{w}_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0, 0)^t$

令 $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, 得 $x_3 = -2$, $x_1 = 1$, 记 $\vec{w}_2 = (1, 0, -2, 1)^t$

则 $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ 线性无关. 故 $\text{sol}(L) = \vec{v} + \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$.

当 $\lambda \neq 8$ 时 $\text{rank}(B) = \text{rank}(A) = 3$.

$$\dim(\text{sol}(L)) = 4 - 3 = 1.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 - 4x_4 \\ -x_3 = -3 + 2x_4 \\ (\lambda - 8)x_1 = 0 \end{cases}$$

令 $x_4 = 0$, 得到 $x_3 = 3, x_1 = 0, x_2 = 4$.

记 $\vec{v} = (0, 4, 3, 0)^t$, 则 $\vec{v}$ 是 L 的一个特解.

以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 H 等价于.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4x_4 \\ -x_3 = 2x_4 \\ (\lambda - 8)x_1 = 0 \end{cases}$$

令 $x_4 = 1$, 则 $x_3 = -2, x_1 = 0, x_2 = -2$.

记 $\vec{w} = (0, -2, -2, 1)^t$.

故 $\text{sol}(L) = \vec{v} + \langle \vec{w} \rangle$.

坐标空间之间的线性映射.

定义: 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是映射. 如果对任意 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$$

$$\phi(\alpha \vec{x}) = \alpha \phi(\vec{x}).$$

则称 ϕ 是线性映射.

定义: 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\phi^{-1}(\{\vec{0}_m\})$ 称为 ϕ 的核(kernel) 记为 $\ker(\phi)$. 坐标空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\text{im}(\phi)$ 称为 ϕ 的像(image).

5. 在下述 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射中, 哪些是线性映射:

根据定义验证.

(i) $[x_1, x_2, \dots, x_n] \mapsto [x_n, x_2, \dots, x_1];$

✓

(ii) $[x_1, x_2, \dots, x_n] \mapsto [x_1, x_2^2, \dots, x_n^n];$

✗

(iii) $[x_1, x_2, \dots, x_n] \mapsto [x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n];$

✓

其中 $[x_1, \dots, x_n]$ 代表列向量 $(x_1, \dots, x_n)^t$.