第九周习题课

李文桥

2023 年 11 月 23 日

1 线性映射

回忆: 设 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的一组向量. 则存在唯一的线性映射 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得 $\phi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$, $i = 1, \cdots, n$.

第八周习题3: 在求解本题前, 我们需要对线性映射有更多的了解.

命题 1.1 设 $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为平面上的线性映射. 则:

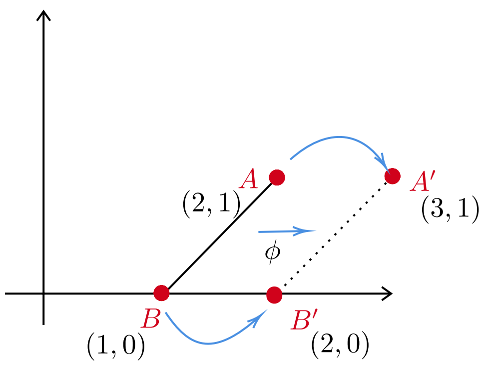
1. ϕ 被两个不平行向量的像决定;
2. ϕ 把直线映到直线, 把线段映到线段, 并不改变相应像点在线段上的比例位置, 即中点映为中点, 三等分点映为三等分点;

证明: 1 由线性映射基本定理直接得到. 关于 2, 设平面上有两点 A, B, 对应向量为 $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$. 则任取直线 $\overline{AB}$ 上一点 C, 其对应向量可表示为 $\boldsymbol{v}_C = \lambda \boldsymbol{v}_A + (1-\lambda)\boldsymbol{v}_B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 当 $0 \le \lambda \le 1$ 时表示 C 在线段 $\overline{AB}$ 上. 则:

$$\phi(\boldsymbol{v}_C) = \phi(\lambda \boldsymbol{v}_A + (1-\lambda)\boldsymbol{v}_B) = \lambda\phi(\boldsymbol{v}_A) + (1-\lambda)\phi(\boldsymbol{v}_B).$$

自然得证. □

(a) 如图, 需要找一个线性映射 ϕ 使得线段 $\overline{AB}$ 在 ϕ 下的像为 $\overline{A'B'}$. 那么根据前命题的 2, 实际上只需要将 A, B 分别映到 A', B'(或者 B', A')即可. 由于点 A, B 所对应的向量 $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$ 线性无关, 所以这样的 ϕ 一定存在.



(b) 设 ϕ 对应矩阵为$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则平面上任一点 (x, y), 在 ϕ 下的像为:

$$\phi((x,y)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

若 $(x, y) \in S$, 则 $y = (x-2)^2 + 1$. 我们需要 $\phi((x, y)) \in T(S)$, $\forall (x, y) \in S$. 那么有:

$$cx + dy - 1 = (ax + by - 3)^2.$$

代入 y 的表达式, 化简得到:

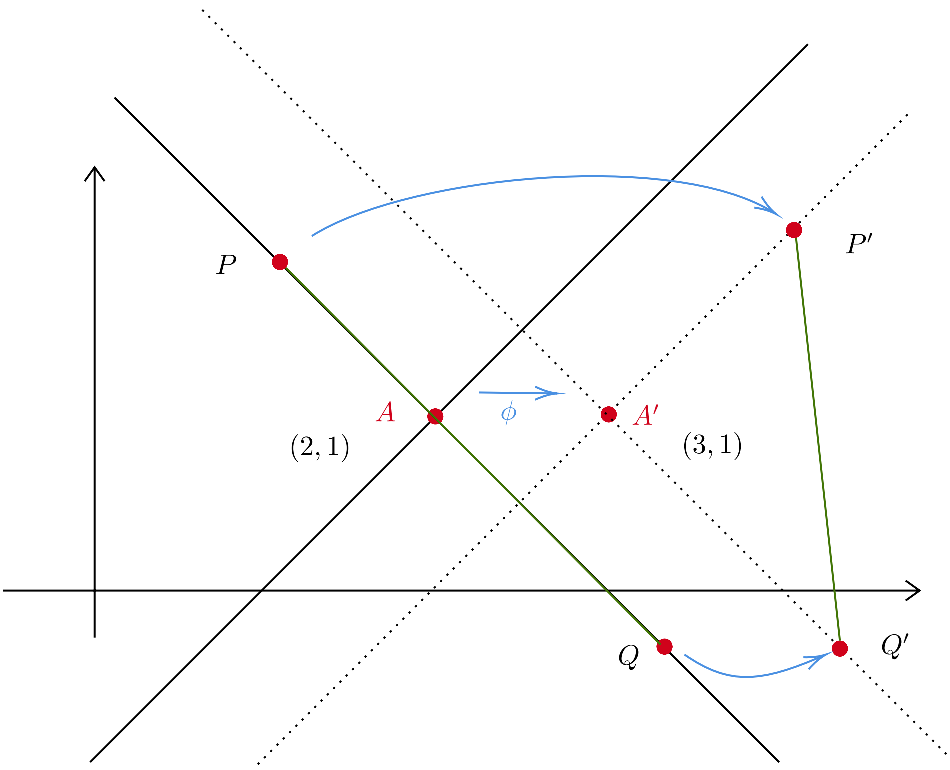
$$b^2x^4+2\,(a-4b)\,b\,x^3+\left(2\,(5b-3)\,b+(a-4b)^2-d\right)x^2+(2\,(5b-3)\,(a-4b)-c+4d)\,x+(5b-3)^2-5d+1=0.$$

上式需对任意的实数 x 恒成立, 则 x 的系数全部为 0. 可以解出:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 0 \\ c = 8 - 6\sqrt{2} \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = 0 \\ c = 8 + 6\sqrt{2} \\ d = 2 \end{cases}.$$

不难验证这样的 ϕ 满足要求.

(c) $S, T(S)$ 均是两条直线的并. 任取 S 中的两点 P, Q, 如果 P, Q 所决定的直线在 S 中, 那么 $\phi(P), \phi(Q)$ 所决定的直线也在 $T(S)$ 中.下图所示情况不能发生.



于是我们可以看出, 若记 $l_1=\{(x,y)\mathbb{R}\,|\,y-1=x-2\}$, $l_2=\{(x,y)\mathbb{R}\,|\,y-1=-x+2\}$, 只能是:

$$\phi(l_1)=T(l_1),\ \phi(l_2)=T(l_2)\ \text{或}\ \phi(l_1)=T(l_2),\ \phi(l_2)=T(l_1).$$

同 (b) 的做法, 可以设 ϕ 对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 使得 $\phi(l_1)=T(l_1)$, $\phi(l_2)=T(l_2)$. 则由 $\phi(l_1)=T(l_1)$ 可知:对任意的 $(x,y)\in l_1$, $\phi((x,y))\in T(l_1)$. 即 $y=x-1$ 且

$$cx+dy-1=ax+by-3$$

恒成立. 化简得:

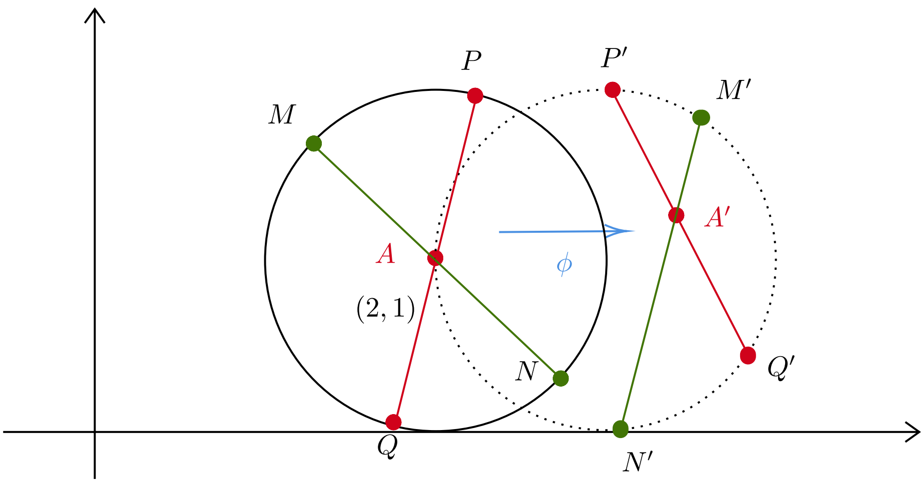
$$(a+b-c-d)\,x-b+d-2=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

从而 $a+b-c-d=0$, $-b+d=2$. 同理, 由 $\phi(l_2)=T(l_2)$ 可得: $a-b+c-d=0$, $3b+3d=4$.可以解出:

$$\begin{cases} a=\dfrac{5}{3} \\ b=-\dfrac{1}{3} \\ c=-\dfrac{1}{3} \\ d=\dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

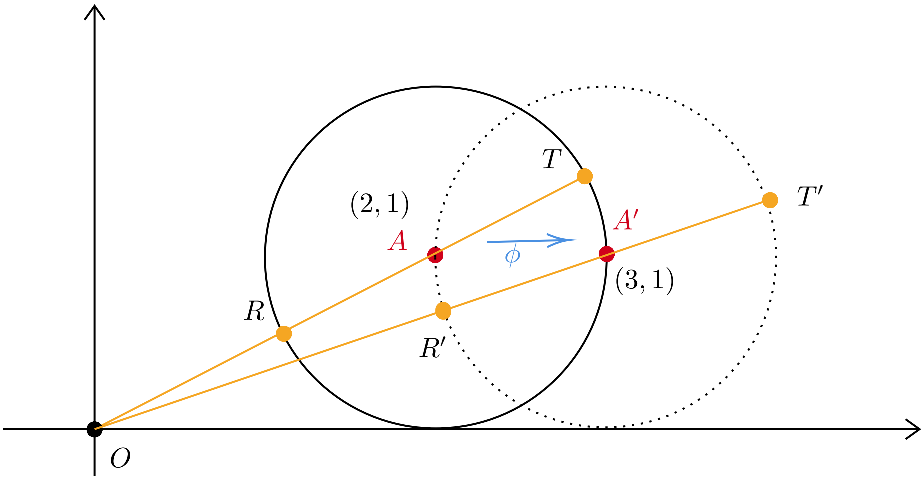
不难看出这样的 ϕ 满足要求.

(d) S 是以 $(2,1)$ 为圆心, 1 为半径的圆. 我们证明: 若 $\phi(S)=T(S)$, 则 $\phi((2,1))=(3,1)$, 即将圆心映为圆心.



如上图, 假设 A,P,Q,M,N 在 ϕ 下的像为 A',P',Q',M',N', 其中 A 为 S 的圆心, $\overline{PQ},\overline{MN}$ 为 S 的两条直径. 首先, A' 为线段 $\overline{P'Q'}$ 和 $\overline{M'N'}$ 的中点. 若 A' 不为圆心, 则线段 $\overline{P'Q'}$ 与 $\overline{M'N'}$ 都是以 A' 为中点的弦, 也就是过 A' 点且与 A' 的连心线垂直的弦. 这说明 $\{P',Q'\}=\{M',N'\}$. 进一步说明 $\phi(S)=\{P',Q'\}$, 不符合要求(实际上, 这样的线性映射不存在). 所以 A' 只能是 $T(S)$ 的圆心.

设坐标原点为O. 考虑直线$\overline{OA}$与S的两个交点R,T, 位置下如图所示. 设R,T在ϕ下的像为R',T', 则由$\boldsymbol{v}_R,\boldsymbol{v}_T$与$\boldsymbol{v}_A$共线知$\boldsymbol{v}_{R'},\boldsymbol{v}_{T'}$与$\boldsymbol{v}_{A'}$共线. 而不难计算$\boldsymbol{v}_T=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\boldsymbol{v}_R$, $\boldsymbol{v}_{T'}=\dfrac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\boldsymbol{v}_{R'}$, 比例不同, 矛盾. 这说明这样的线性映射不存在.



2 矩阵的秩(有了矩阵运算之后)

回忆: 用大写字母表示矩阵, 并假设矩阵阶数与运算相容.

1. $\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$.
   进一步, $\mathrm{rank}(A_1+A_2+\cdots+A_n)\le\mathrm{rank}(A_1)+\mathrm{rank}(A_2)+\cdots+\mathrm{rank}(A_n)$;
2. $\mathrm{rank}(AB)\le\mathrm{rank}(A)$ 且 $\mathrm{rank}(AB)\le\mathrm{rank}(B)$;
3. 设A的列数为s, 则$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le s+\mathrm{rank}(AB)$ ($Sylvester$);
3. 设A,C为满秩方阵, 则$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(BC)$;
4. $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^t)$.

第八周习题4:

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(A+B+C)=&\mathrm{rank}(2A+2B+2C)\\=&\mathrm{rank}((A+B)+(B+C)+(C+A))\\\le&\mathrm{rank}(A+B)+\mathrm{rank}(B+C)+\mathrm{rank}(C+A).\end{aligned}$$

注: 本题也可以利用初等行列变换证明.

第九周习题5: 直接利用$Sylvester$不等式即可.

第八周习题5: **必要性**:

若$\mathrm{rank}(A)=0$, 则只需要令$a_1=a_2=\cdots=a_m=0$, b_i任取即可. 以下考虑$\mathrm{rank}(A)=1$. 那么$\dim(V_r(A))=1$, 故存在$(b_1,\cdots,b_n)\in V_r(A)$为$V_r(A)$的基, A的每一行被其线性表出. 故设:

$$\overrightarrow{A_i}=a_i(b_1,\cdots,b_n),\ a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\cdots,m.$$

则 $A=\begin{pmatrix}a_1(b_1,\cdots,b_n)\\a_2(b_1,\cdots,b_n)\\\vdots\\a_m(b_1,\cdots,b_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1,\cdots,b_n\end{pmatrix}$.

充分性:

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1,\cdots,b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_mb_1&a_mb_2&\cdots&a_mb_n\end{pmatrix}.$$

若 $a_1=\cdots=a_m=0$, 则 $A=O$. 否则, 不妨设 $a_1\neq 0$, 从而 A 可经过一系列初等行变换化为:

$$A\to\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

从而 $\operatorname{rank}(A)\leq 1$.

3 其它习题

回忆: 1. 方阵 A 可逆当且仅当 A 满秩; 方阵 A 可逆当且仅当存在同阶方阵 B 使得 $AB=E$.

2. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆, 则:
   - (i) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;
   - (ii) $(A^{-1})^{-1}=A$;
   - (iii) $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$;
   - (iv) 设 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^t$ 为未知数构成的向量, 则线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$.

3. (搬运工引理)设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 则 $AE_{i,j}$ 就是第 j 列为 $\overrightarrow{A^{(i)}}$, 其余列为零的矩阵; $E_{i,j}A$ 就是第 i 行为 $\overrightarrow{A_j}$, 其余行为零的矩阵;

4. 矩阵代数 $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ 的中心元为标量矩阵, 即 $\{\lambda E_n\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$.

第九周习题3: (联想: 任意函数均可写成一个偶函数和一个奇函数的和.) 设 A 为方阵, 容易验证: $A+A^t$ 为对称方阵, $A-A^t$为斜对称方阵, 则:

$$A=\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}$$

可以写为一个对称方阵和一个斜对称方阵的和.

第九周习题5: 本题方法与求矩阵的中心元的方法类似. 我们可以先用特殊的矩阵(例如 E_{ij})去测试 A 的性质.

设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$. 对任意的$1\leq i,j\leq n$,

$$AE_{i,j}=(O_{n\times(j-1)},A^{(i)},O_{n\times(n-j)}).$$

从而 $0=\mathrm{tr}(AE_{i,j})=a_{j,i}$. 故 $A=O$.