第八次习题课.

2023.11.18.

补充知识:

子矩阵:

设矩阵 $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m' \le m$, $n' \le n$. 取定 F 的任意 m' 行和 n' 列, 由处于这些行以及列的元素所构成的 $m' \times n'$ 矩阵称为 F 的子矩阵. 例如: $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,那么取 F 的第 1,3 行和 2,3 列所构成的子矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

命题:

任意矩阵的秩不小于其子矩阵的秩.

证明:

设 $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 有子矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m'\times n'}$, 则可以通过行列置换将 A 调整至 F 的左上角. 于是我们不妨设:

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 $B \in \mathbb{R}^{m'\times(n-n')}$, $C \in \mathbb{R}^{(m-m')\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{(m-m')\times(n-n')}$. 由于 $V_c\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \subseteq V_c\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 我们有:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

同样地, 由于 $V_r(A) \subseteq V_r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, 我们有:

$$\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}.$$

于是 $\operatorname{rank}(A) \le \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(F)$. $\square$

例：利用上述命题再次证明

(a) $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

(b) $\operatorname{rank}(A, B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

证明：习题已证 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 若作初等行列变换:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}$$

注意到 $A+B$ 是 $\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix}$ 的一个子矩阵, 所以 $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A+B \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$;

若作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}$$

注意到 (A, B) 是 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}$ 的一个子矩阵, 所以 $\operatorname{rank}(A, B) \leq \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. $\square$

认识矩阵的秩：两种观点：

1. 进行初等行列变换后，矩阵的非零行(列)的个数

2. 矩阵行(列)空间的维数 或者说矩阵的行(列)向量的极大线性无关组所包含向量的个数.

注意点：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

含有参数 α，2阶方阵.

其行列式值为 1.

因此：$\operatorname{rank}(A) = 2$

坐标空间之间的线性映射

定义：设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是映射，如果对任意 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$，$\alpha \in \mathbb{R}$，有

$$\phi(\vec{x}+\vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$$

$$\phi(\alpha\vec{x}) = \alpha\,\phi(\vec{x}).$$

则称 ϕ 是线性映射。

定义：设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射，坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\phi^{-1}(\{\vec{0}_m\})$ 称为 ϕ 的核(kernel)，记为 $\ker(\phi)$，坐标空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathrm{im}(\phi)$ 称为 ϕ 的像(image).

对偶定理：$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$；

核空间升链:

设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$、$\phi^k$ 表示 ϕ 复合 k 次 我们有:

(a) $\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \cdots \subseteq \ker(\phi^k) \subseteq \cdots$;

(b) $\operatorname{im}(\phi) \supseteq \operatorname{im}(\phi^2) \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{im}(\phi^k) \supseteq \cdots$,

作业:

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 中的标准基为 $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. 线性映射 $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 由如下关系给出:

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{e}_1) = 3\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \phi(\boldsymbol{e}_2) = -2\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_4 \\ \phi(\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_3 + 4\boldsymbol{e}_4 \\ \phi(\boldsymbol{e}_4) = 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4 \end{cases}.$$

(a) 求 ϕ 在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ 下的矩阵, 并求 $\ker(\phi), \operatorname{im}(\phi)$ 的维数与一组基;

(b) 求 $\phi \circ \phi$ 在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ 下的矩阵.

(a)

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

利用初等行变换得

$$A_\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{11} & \frac{29}{11} \\ 0 & 0 & \frac{59}{11} & -\frac{29}{11} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{11} & \frac{29}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \mathrm{rank}(A_\phi) = 3$.

$\dim(\ker(\phi)) = 4 - 3 = 1$.

$\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基可取 $\vec{A}_\phi^{(1)}, \vec{A}_\phi^{(2)}, \vec{A}_\phi^{(3)}$.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 11x_2 - 5x_3 = -6x_4 \\ -59x_3 = -29x_4 \end{cases}$$

$\ker(\phi)$ 的一组基是 $\begin{pmatrix} -3 \\ -19 \\ 29 \\ 59 \end{pmatrix}$

(b).

$$A_{\phi^2} = A_\phi \cdot A_\phi = \begin{pmatrix} 18 & -20 & 3 & -7 \\ -50 & 65 & 13 & 12 \\ -3 & 7 & 47 & -21 \\ -11 & 18 & -28 & 19 \end{pmatrix}$$

2. 计算以下情景时的 AB, BA 以及 $\mathrm{rank}(AB), \mathrm{rank}(BA)$.

(a) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a). $AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = BA$

$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(BA) = 2$

(b) $AB = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{7}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & 3 \\ -4 & -4 & 4 \\ -5 & -\frac{11}{2} & 5 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(BA) = 2$

3. 设映射 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+1,y)$ 为平移映射. 对于以下四种方式给出的子集 $S \subseteq \mathbb{R}^2$, 分别判断: 是否存在线性映射 $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 使得 $\phi(S) = T(S)$.

(a) $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-2 = y-1,\ 1 \le x \le 2\}$;

(b) $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 = y-1\}$;

(c) $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 = (y-1)^2\}$;

(d) $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1\}$.

见李老师讲义.

4. 设 $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B+C) \le \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(B+C) + \operatorname{rank}(C+A).$$

$\operatorname{rank}(A+B+C) = \operatorname{rank}(2A+2B+2C)$

$= \operatorname{rank}((A+B)+(B+C)+(C+A))$

$\le \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(B+C) + \operatorname{rank}(C+A)$

5. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明: $\operatorname{rank}(A) \le 1$ 当且仅当存在实数 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2 \cdots, b_n$ 使得:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n).$$

证明："$\Longrightarrow$"

若 $rank(A)=0$，则只需令 $a_1=\cdots=a_m=0$，b_i 任取即可。

若 $rank(A)=1$，则 $\dim(V_r(A))=1$，故存在 $(b_1,\cdots,b_n)\in V_r(A)$ 为 $V_r(A)$ 的基，A 的每一行被其线性表出。故设

$$\vec{A_i}=a_i(b_1,\cdots,b_n),\ a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\cdots,m.$$

则 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)$

"$\Longleftarrow$"

$\because$ $$A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)$$

$$\therefore rank(A)\le rank\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}\cdot rank(b_1,\cdots,b_n)$$
$$\le 1\cdot 1=1.$$

复习：扩展的辗转相除法。

输入：$m,n\in\mathbb{Z}^+$

输出：$g\in\mathbb{Z}^+$，$u,v\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $g=\gcd(m,n)$，且
$$um+vn=g$$

1. 初始化：

$i=1.$ $\quad r_0 = m \quad u_0 = 1, \ v_0 = 0$

$\qquad\quad r_1 = n \quad u_1 = 0, \ v_1 = 1$

2. while $r_i \neq 0$ do

(a) $i = i+1$

$$\begin{bmatrix} r_2 = rem(r_0, r_1), & u_2 = u_0 - q u_1, & v_2 = v_0 - q v_1 \\ r_1 = n & u_1 = 0, & v_1 = 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$q_i \leftarrow quo(r_{i-2}, r_{i-1})$

$r_i \leftarrow rem(r_{i-2}, r_{i-1})$

(c) $u_i \leftarrow u_{i-2} - q_i u_{i-1}$, $\quad v_i \leftarrow v_{i-2} - q_i v_{i-1}$.

end do.

3 $\quad g \leftarrow r_{i-1}$, $\quad u \leftarrow u_{i-1}$, $\quad v \leftarrow v_{i-1}$.

ex:

$$\begin{pmatrix} 95 & 1 & 0 \\ 57 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 38 & 1 & -1 \\ 57 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 38 & 1 & -1 \\ 19 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 19 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$-1 \times 95 + 2 \times 57 = 19$

$3 \times 95 - 5 \times 57 = 0$