No.
Date

对称多项式

1. (对称多项式的判别)

$f \in R[x_1,\dots,x_n]$ 为对称多项式

$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $f_\sigma = f \quad \forall \sigma \in S_n$ 其中 $f_\sigma(x_1,\dots,x_n) := f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$

$\Longleftrightarrow$ $f_\sigma = f \quad \forall \sigma \in (12),(13),\dots,(1n)$

Pf: 注意到 S_n 可以由 $(12),(13),\dots,(1n)$ 生成

2. 基本对称多项式

Def: n 元基本对称多项式为

$$\sigma_1(x_1,\dots,x_n) = x_1+x_2+\dots+x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma_k(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

$$\sigma_n(x_1,\dots,x_n) = x_1x_2\cdots x_n$$

3. 根与系数的关系

$$(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \cancel{x^n+(-1)^{n-1}\sigma_1 x^{n-1}+\dots+(-1)^{n-k}\sigma_k x^{n-k}+\dots+(-1)\sigma_n}$$

$$= x^n+(-1)^1\sigma_1 x^{n-1}+\dots+(-1)^k\sigma_k x^{n-k}+\dots+\sigma_n$$

4. 对称多项式基本定理

Thm: 设 $f \in F[x_1,\dots,x_n]$ 为对称多项式, 则 f 可以由基本对称多项式加,减,乘得到, i.e. $\exists!$ (存在唯一) $F(x_1,\dots,x_n) \in F[x_1,\dots,x_n]$ s.t.

$$f(x_1,\dots,x_n) = F(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$$

Example: $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3 = (x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$

Pf of Thm: 对变量个数归纳

$n=1$ 时 ✓

No.
Date . .

假设 $n-1$ 时成立，n 时

将 $f\in F[X_1,\cdots,X_n]$ 视作 X_n 的多项式，写作

$$f = a_N X_n^N + a_{N-1} X_n^{N-1} + \cdots + a_0 \qquad a_N,\cdots,a_0 \in F[X_1,\cdots,X_{n-1}]$$

发现1：设 $\tau_1,\cdots,\tau_{n-1}$ 为 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的 $n-1$ 元基本对称多项式

$$(*)\begin{cases} \sigma_1 = \tau_1 + X_n \Longrightarrow \tau_1 = \sigma_1 - X_n \\ \sigma_2 = \tau_2 + \tau_1 X_n \Longrightarrow \tau_2 = \sigma_2 - \tau_1 X_n = \sigma_2 - \sigma_1 X_n + X_n^2 \\ \cdots \\ \sigma_{n-1} = \tau_{n-1} + \tau_{n-2} X_n \Longrightarrow \tau_{n-1} = \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2} X_n + \cdots + (-1)^k \sigma_{n-k-1} X_n^k + \cdots + (-1)^{n} X_n^{n-1} \end{cases}$$

$$(**)\quad \sigma_n = \tau_{n-1} X_n \Longrightarrow 0 = \sigma_n - \sigma_{n-1} X_n + \cdots + (-1)^n \sigma_1 X_n^{n-1} + (-1)^{n+1} X_n^n$$

i.e. X_n 的 n 次式可以通过上式写成以对称多项式为系数的关于 X_n 的低于 n 次的多项式

发现2：$a_N,\cdots,a_0$ 为 $n-1$ 元对称多项式

由归纳 $a_N(x_1,\cdots,x_{n-1}) = a_N'(\tau_1,\cdots,\tau_{n-1}),\ \cdots,\ a_0(x_1,\cdots,x_{n-1}) = a_0'(\tau_1,\cdots,\tau_{n-1})$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $a_i = a_i''(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,X_n) \quad 1\le i\le N \quad a_i''$ 为 $n+1$ 元多项式

$$\Rightarrow f = a_N''(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,X_n) X_n^N + \cdots + a_0''(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,X_n)$$
$$= b_M(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) X_n^M + \cdots + b_0(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$$
$$\overset{(**)}{=} c_{n-1}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n) X_n^{n-1} + \cdots + c_0(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$$

Claim: $c_{n-1} = \cdots = c_1 = 0$

将 X_i 与 X_n 交换

$$\Rightarrow f = c_{n-1} X_i^{n-1} + \cdots + c_0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ f \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_0 = f,\quad c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$$

唯一因式分解整环

(Def) 整环 D 是 UFD 当 !

(i) 存在性: $\forall a \in D$, a 可以写成$\boxed{\text{有限}}$多个不可约元素之积

(ii) 唯一性: 分解在相伴意义下唯一.

(判别) D 是 UFD

$\Leftrightarrow$ (i) + D 中不可约元是素元

$\Leftrightarrow$ (i) + D 中任意非零元 a, b 都存在最大公因子

Example: (非 UFD)

(i) $F[x_1, x_2, \dots,]$ 其中 $x_{n+1}^2 = x_n$

则 $x_1 = x_2^2 = x_3^4 = \dots$ 　　存在性不满足

(ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$

$6 = 2\times 3 = (1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)$ 　　分解不唯一.

· $2, 3, 1+\sqrt{5}i, 1-\sqrt{5}i$ 不可约

· 2 不可约元却不是素元

· 6 与 $2+2\sqrt{5}i$ 无最大公因子.

Thm (Gauss) D UFD $\Rightarrow$ $D[x]$ UFD.

prop: ED $\Rightarrow$ PID $\Rightarrow$ UFD.

Rmk: Lemma: 设整环 D 中最大公因子存在, $a, b, c \in D\setminus\{0\}$ 则

(1) $((a,b),c) \sim (a,(b,c))$ 　　(a,c) 表示 a, c 最大公因子.

(2) $c(a,b) \sim (ca,cb)$

(3) $(a,b)\sim 1$, $(a,c)\sim 1 \Rightarrow (a,bc)\sim 1$