日期:　　/

$\varphi \in \mathcal{L}(V)$ U为φ-子空间，则将U的基扩充为V的基

$(u_1,\cdots,u_r,v_{r+1},\cdots,v_n)$下有矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ A为$\varphi|_U$上矩阵

定义 $\tilde{\varphi}: V/U \to V/U$ 称为商算子

$\alpha+U \mapsto \varphi\alpha+U$

若$\alpha+U=\beta+U$ 则$\alpha-\beta\in U \Rightarrow \varphi(\alpha-\beta)\in U \Rightarrow \varphi(\alpha)+U=\varphi(\beta)+U$

故良定

设 $A=(a_{ij})_{k\times k}$ $C=(c_{ij})_{(n-k)\times(n-k)}$ $B=(b_{ij})_{k\times(n-k)}$

则 $\tilde{\varphi}(\overline{v_{r+i}})=U+(b_{1i}u_1+\cdots+b_{ki}u_k+c_{1i}v_{r+1}+\cdots+c_{n-k\,i}v_n)$

$=U+(c_{1i}v_{r+1}+\cdots+c_{n-k\,i}v_n)$

$=c_{1i}\overline{v_{r+1}}+\cdots+c_{n-k\,i}\overline{v_n}$

故C为$\tilde{\varphi}$在$(\overline{v_{r+1}},\cdots,\overline{v_n})$下矩阵.

应用：(下周会讲的复相似上三角化)

$\forall \varphi\in\mathcal{L}(V)$，$\varphi$在一组基下矩阵为上三角阵($\dim V=n$)

归纳：$n=1$时显然，若$n=k$时成立，$n=k+1$时，

由代数基本定理知 $\exists\lambda\in\mathbb{C}$，$\alpha\in V$ s.t. $A\alpha=\lambda\alpha$

考虑商算子$\tilde{\varphi}: V/\langle\alpha\rangle \to V/\langle\alpha\rangle$，由归纳假设知

存在$V/\langle\alpha\rangle$的基$\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_n}$ s.t. $\tilde{\varphi}$矩阵上三角

则 φ 在 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 下矩阵上三角.

注：从上述定理可看出对 $\mathbb{C}$ 的子域 $\mathbb{F}$，$\operatorname{tr}A$ 为特征根之和，$\det A$ 为特征根之积，实际对一般域也成立。

2. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$，其中 V 为 n 维复线性空间. $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$，
则 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在同一组基下矩阵均为上三角阵.

证明：由 V 为复线性空间知 $\mathcal{A}$ 有特征值 λ_0。

$$\forall\alpha\in\ker(\lambda_0\mathcal{E}_V-\mathcal{A}),\quad (\lambda_0\mathcal{E}_V-\mathcal{A})\mathcal{B}\alpha=\lambda_0\mathcal{B}\alpha-\mathcal{A}\mathcal{B}\alpha$$

$$=\lambda_0\mathcal{B}\alpha-\mathcal{B}\mathcal{A}\alpha$$

$$=\lambda_0\mathcal{B}\alpha-\lambda_0\mathcal{B}\alpha$$

$$=0$$

故 $\ker(\lambda_0\mathcal{E}_V-\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{B}$-子空间

从而 $\exists\lambda_0'\in\mathbb{C}$ 与 $\alpha_0\in\ker(\lambda_0\mathcal{E}_V-\mathcal{A})$

s.t. $\mathcal{B}|_{\ker(\lambda_0\mathcal{E}_V-\mathcal{A})}\alpha_0=\lambda_0'\alpha_0$

故 $\langle\alpha_0\rangle$ 为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的公共不变子空间，

考虑商算子，类似上题归纳可知 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 可同时上三角化.

3. 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times m}$，$B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，$C\in\mathbb{F}^{m\times n}$，若 $AC=CB$，且 $\operatorname{rank}C=r$
则 A 与 B 至少有 r 个相同特征值.

证明：$\exists P\in GL_m(\mathbb{R})$，$Q\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $PCQ=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$AP^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{-1}B$$

$$PAP^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{-1}BQ$$

日期: /

设 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$ $\quad Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A_3=B_2=0,\ A_1=B_1$

从而 $\det\left(\lambda E_n-\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_4\end{pmatrix}\right)=\det(\lambda E-A_1)\det(\lambda E-A_4)$

$\det\left(\lambda E-\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}\right)=\det(\lambda E-B_1)\det(\lambda E-B_4)$

故至少 r 个相同特征值

推论二: 若 A,B 无相同特征根, 矩阵方程 $AX=XB$ 无解

(以后有其它方法理解此命题)

从而 $\varphi: M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 为同构,

$X \to AX-XB$

故 $\forall C\in M_n(\mathbb{F})\ \exists X\in M_n(\mathbb{F})$ s.t. $AX-XB=C$.