

1. 上周作业

1.1

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 - 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$= \lambda^2 + 1$	不可	可
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$= \lambda(\lambda^2 + 3)$	不可	可

1.2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$
 $\Rightarrow A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{2013} & -2^{2013} \\ -2^{2013} & 2^{2013} \end{pmatrix}$
 或 $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\lambda \xrightarrow{\text{Caley-Hamilton}} A^2 = -2A$
 $\Rightarrow A^{2014} = (-2)^{2013} A$

1.3. $\phi: F^{n \times n} \rightarrow F^{n \times n} \quad X \mapsto X^T$

设 λ 为特征值, 则 $\phi(X) = \lambda X = X^T \Rightarrow X = \phi^2(X) = \lambda^2 X \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1 \quad X^T = \phi(X) = X \Rightarrow X \in \text{Sym}_n(F)$

$\lambda = -1 \quad -X^T = \phi(X) = -X \Rightarrow X \in \text{SSym}_n(F)$

注意到 $F^{n \times n} = \text{Sym}_n(F) \oplus \text{SSym}_n(F) \Rightarrow$ 可对角化
 $\uparrow$
 线性记法

1.4 V n -线性空间 $A \in \mathcal{L}(V) \quad V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m \quad V_i$ 为 A -不变空间

证明 A 可对角化 $\Leftrightarrow A|_{V_i}$ 可对角化

由 A 可对角化 $\Downarrow$ $A|_{V_i}$ 可对角化 $\Downarrow$
 u_i 为一次因式根 (设重数 c) $\Leftrightarrow u_i|_{V_i}$ 为一次因式根 $\forall i$
 $\Uparrow$
 $\Phi \quad u_i = (\text{con}(u_i|_{V_1}, \dots, u_i|_{V_m}))$

A 可对角化 $\Rightarrow V$ 有特征向量 $x_1, \dots, x_n$ 为基 $\begin{cases} 1. p_i$ 为向 V_i 投影 $p_i x_j$ 仍为特征向量 \\ \Rightarrow $V_i = \langle p_i x_1, \dots, p_i x_n \rangle$ \\ \Rightarrow V_i 可对角化 \end{cases}
 $\Rightarrow V_i$ 可对角化 $\Rightarrow V_i = \langle x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i, d_i} \rangle \quad d_i = \dim V_i, x_{ij}$ 为特征向量



$\Rightarrow V = \langle X_{ij} \rangle_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d} \Rightarrow V$ 可对角化

1.5 $A \in L(V)$ 半单 若 A 的任意不变子空间存在不变的补子空间. 则

(i) 若 V 为复线性空间 半单 $\Leftrightarrow$ 可对角化

(ii) 若 V 为实线性空间 是否等价?

解 (i) 半单 $\Rightarrow$ 可对角化

复线性空间 $\Rightarrow$ 有一维不变子空间 $\xrightarrow{\text{半单}}$ 有不变的 $n-1$ 维补子空间 $\xrightarrow{\text{对补子空间重复之前操作}}$ V 为一维不变子空间和

可对角化 $\Rightarrow$ 半单

设 $U \subset V$ 是不变子空间, V 可对角化 $\Rightarrow V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, U 不可对角化

$\Rightarrow U = U \cap V_1 \oplus \dots \oplus U \cap V_k$

$\forall i, U \cap V_i$ 在 V_i 中的任意补子空间 W_i 都是不变子空间 ($A|_{V_i} = \text{id}$)

$\Rightarrow V = \bigoplus_i (U \cap V_i \oplus W_i)$

$= U \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

(ii) 不等价 可对角化 $\Rightarrow$ 半单 $\checkmark$

半单 $\Rightarrow$ 可对角化 $\times$

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi_A = \lambda^2 + 1$, 无平凡的不变子空间 $0, \mathbb{R}^2$

2. 分解

定理

打三同

不变子空间

可对角化

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ V_i 为不变子空间

定理

$\checkmark$ 存在性: V 存在不可分解: 即 $\exists V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ s.t. V_i 为不可分不变子空间

唯一性: 不唯一, 但对不同的不可分解, 有些量是唯一的 (初等因子)

$\checkmark$ 不可分不变子空间的刻画: 1. 循环子空间 2. $A|_{V_i} = f^{n_i}$ f 不可约 $\subset \mathbb{F}[x]$

空间由矩阵

$A|_{V_i}$ 的矩阵表示由 $\chi_{A|_{V_i}}$ 唯一确定

如何求 $\chi_{A|_{V_i}}$ (确定相似标准型)

如何求 $A|_{V_i}$ (确定矩阵表示)



3.

设 $A \in I(V)$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 V 的基

$$N(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A$$

$$A = (a_{ij})$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) (N I_n - A) = 0$$

$$N I_n - A = \begin{pmatrix} N - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & N - a_{nn} \end{pmatrix} \in F[x]^{n \times n}$$

$$\Downarrow \begin{cases} \exists P(A), Q(A) \in F[A]^{n \times n}, \text{ 可逆} \\ \text{s.t. } P(A)(N I_n - A)Q(A) = \text{diag}(1, \dots, 1, f_{s_1}(A), \dots, f_n(A)) \end{cases}$$

$f_{s_1}, \dots, f_n$ 为 F 上多项式 且为不可约多项式的幂次

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) P(A)^{-1} P(A) (N I_n - A) Q(A) = 0$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{diag}(1, \dots, 1, f_{s_1}(A), \dots, f_n(A)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \dots = \beta_s = 0 \\ f_i(A)\beta_i = 0 \quad s+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = \langle P(A)\alpha_1, \dots, P(A)\alpha_n \rangle \\ = F[A]\beta_{s+1} + \dots + F[A]\beta_n \quad (\beta_{s+1}, \dots, \beta_n \text{ 生成的循环子空间}) \\ F[A]\beta_i \text{ 的极小多项式为 } f_i \quad s+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\text{claim: } V = F[A]\beta_{s+1} \oplus \dots \oplus F[A]\beta_n$$

$$\text{if of claim: } n = \dim V = \deg \det(xI - A) = \deg f_{s_1} + \dots + \deg f_n \\ = \dim F[A]\beta_{s+1} + \dots + \dim F[A]\beta_n$$

$\Rightarrow$ 直和

$$\text{至此, 我们找到了 } V_i, \chi_{A|V_i} \quad (V_i = F[A]\beta_i, \chi_{A|V_i} = f_i)$$

~~但这个分解不是不可约分解, 因为 (*) 的一般理论~~

$$\text{Thm: 设 } A \in F[x]^{n \times n}, \text{ 则存在 } p(x), q(x) \in F[x]^{n \times n}, \text{ 且可逆 s.t.} \\ p(x)Aq(x) = \begin{pmatrix} d_1(x) & \dots & d_r(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{且 } d_i(x) \in F[x] \text{ 首一多项式 } d_i | d_{i+1} \quad \forall i$$

pf: 若 $A=0$:

• 不妨设 $A = (a_{ij}(x)) \neq 0$

• 不妨设 $a_{11}(x) \neq 0$



No.

Date

不妨设 $a_n \nmid a_{ij}(x) \quad \forall i, j$

(1) 对 $\deg a_n(x) = 0$ 时

$$\deg a_n(x) = 0 \quad \checkmark$$

设 $\deg a_n(x) < t$ 时成立. t 时.

$$\text{若 } a_n \nmid a_{ij} : \begin{pmatrix} a_n & a_j = qa_n + r \\ & -q(n+j) \end{pmatrix} \xrightarrow{(i) + (j)} \begin{pmatrix} a_n & r \\ & \end{pmatrix} \xrightarrow{(i) \leftrightarrow (j)} \begin{pmatrix} r & \\ & \end{pmatrix} \xrightarrow{\deg r < t} \begin{pmatrix} r & \\ & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 不妨设 $a_n \mid a_{ij} \quad a_n \mid a_{j1} \quad \forall j \Rightarrow$ 不妨设 $a_{ij} = a_{j1} = 0 \quad \forall j \neq 1$

$$\text{若 } a_n \nmid a_{ij} : \begin{pmatrix} a_n & \\ 0 & a_j = qa_n + r \end{pmatrix} \xrightarrow{(i) + (j)} \begin{pmatrix} a_n & qa_n + r \\ & \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (i) \leftrightarrow (j) \\ \text{消去 } r \end{matrix}} \begin{pmatrix} a_n & r \\ & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r & \\ & \end{pmatrix}$$

不妨设 $a_{ij} = a_{j1} = 0 \quad \forall j \neq 1, \quad a_n \mid a_{ij} \quad \forall i, j$

$$\text{即 } \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & B_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

对 $n-1$ 归纳

□

