日期:　　/

上周作业

1、$\chi_A=(t-1)^4(t+1)^3t^2 \Rightarrow$ 特征根为1，-1，0 且代数重数分别为4，3，2

且矩阵为9阶方阵

$m_A=(t-1)^3(t+1)^3t^2 \Rightarrow$ 属于1,-1,0的Jordan块最大阶数为3,3,2

$$J_A=\begin{pmatrix} J_3(1) & & & \\ & J_3(-1) & & \\ & & J_2(0) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

注：本题为特殊情况，一般只知道 χ_A, m_A（由特征根可确定行列式,迹）以及秩 并不能确定 J_A，初等因子为完全不变量.

2、(i) $\chi_A=\det(tE-A)=t^2-1=(t+1)(t-1)$ 可对角化

$$J_A=\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\chi_t=\det\begin{pmatrix} t-2 & -3 & 3 \\ 1 & t-10 & 6 \\ 2 & -14 & t+8 \end{pmatrix}=(t-1)^2(t-2)$

$\mathrm{rank}(A-E)=2 \Rightarrow$ 属于1 Jordan块为1块

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

如何计算转换矩阵: $(A-E)X=0 \Rightarrow X\in\left\langle\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right\rangle$

$(A-E)^2=\begin{pmatrix} 4 & -12 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$　　$(A-E)^2X=0 \Rightarrow X\in\left\langle\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$(A-2E)X=0 \Rightarrow X\in\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

取 $X_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}\in\ker(A-E)^2\setminus\ker(A-E)$　$X_1=(A-E)X_2=\begin{pmatrix}9\\9\\12\end{pmatrix}$　$X_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

则 $A(X_1\ X_2\ X_3)=(X_1\ X_2\ X_3)\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

取 $P=(X_1\ X_2\ X_3)\Rightarrow P^{-1}AP=J_A$

(iii) $\chi_A=(t-2)(t-1-i)(t-1+i)$ 可对角化

$J_A=\begin{pmatrix}2&&\\&1+i&\\&&1-i\end{pmatrix}$

3. 记 $A=\begin{pmatrix}a&b\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad \chi_A=t^2-at-b$

① $a^2+4b\neq 0$ 时 两根为 λ_1,λ_2

取 $P=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}$ $\quad A^{n-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}&\\&\lambda_2^{n-1}\end{pmatrix}P^{-1}$

$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}&\\&\lambda_2^{n-1}\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix}\Rightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}}\left((\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})a_2+(-\lambda_2\lambda_1^{n-1}+\lambda_1\lambda_2^{n-1})a_1\right)$

② $a^2+4b=0$ 由 $A\notin\langle E\rangle$ 知 $J_A=\begin{pmatrix}\lambda&1\\&\lambda\end{pmatrix}$ λ 为 χ_A 的根 $\frac{a}{2}$

$P=\begin{pmatrix}\frac{a}{2}&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda&1\\&\lambda\end{pmatrix}$

$A^{n-1}=P\begin{pmatrix}\lambda&1\\&\lambda\end{pmatrix}^{n-1}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda^{n-1}&(n-1)\lambda^{n-2}\\&\lambda^{n-1}\end{pmatrix}P^{-1}$

$\Rightarrow a_n=(n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2}a_2-(n-2)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}a_1$

注：高中有解这类方程公式：$a_{n+1}=aa_n+ba_{n-1}$

解方程 x^2-ax-b，$\Delta\neq 0$ 时 两根为 λ_1,λ_2，通项为 $A\lambda_1^n+B\lambda_2^n$

$\Delta=0$ 时 根为 λ，通项为 $(An+B)\lambda^n$

A,B 为常数.

日期:　　　/

5、法一：假设A有非0特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，分别为 $k_1,\cdots,k_s$ 重

则 $tr(A^k)=k_1\lambda_1^k+\cdots+k_s\lambda_s^k=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \vdots & & \\ \lambda_1^s & \cdots & \lambda_s^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix}=0$$

由 λ_i 互不相同且非0知 $\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^s & \cdots & \lambda_s^s \end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{s}\lambda_i\prod_{1\le i<j\le s}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$

从而该方程组只有0解 $\Rightarrow$ A只有0特征根.

由 Hamilton-Cayley 定理知 $A^n=0\Rightarrow A$ 幂零.

法二：利用Newton公式：

记 $S_k=x_1^k+\cdots+x_n^k\in \mathbb{F}[x_1,\cdots,x_n]$

$P_k=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}\in \mathbb{F}[x_1,\cdots,x_n]$

则 $\begin{cases} S_k-P_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}P_{k-1}S_1+(-1)^k kP_k=0, & 1\le k\le n \\ S_k-P_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^nP_nS_{k-n}=0, & k>n \end{cases}$

等价地，有行列式

$$S_n=\det\begin{pmatrix} P_1 & 1 & & 0 \\ 2P_2 & P_1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ (n-1)P_{n-1} & P_{n-2} & \cdots & P_1 & 1 \\ nP_n & P_{n-1} & \cdots & 2P_2 & P_1 \end{pmatrix} \quad P_n=\frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix} S_1 & 1 & & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & n \\ S_n & \cdots & S_2 & S_1 \end{pmatrix}$$

日期: /

故 $s_1=\cdots=s_n=0 \Rightarrow p_1=\cdots=p_n=0 \Rightarrow \chi_A=t^n$

(ii) $\forall k\in\mathbb{N}_+$ $tr(C^k)=tr(C^{k-1}(AB-BA))$

$=tr(C^{k-1}AB-C^{k-1}BA)$

$=tr(AC^{k-1}B)-tr(C^{k-1}BA)$

$=0$

由(i)知 C 幂零

推论1: $AB-BA=\alpha A$ $(\alpha\neq 0)$ 时 A 幂零

推论2: $AB-BA=\alpha A$ $(A,B\in M_n(\mathbb{C}))$ 则 A,B 可同时上三角化

只须证 A 与 B 有公共特征向量后归纳. 将 A,B 看作线性算子

若 $\alpha=0$ 已证, 若 $\alpha\neq 0$, 则 A 幂零, 考虑 A 属于 0 的特征子空间 V^0

则 $\forall \alpha\in V^0$, $AB\alpha-BA\alpha=\alpha A\alpha \Rightarrow AB\alpha=0$

故 V^0 为 B-子空间, 由 $B|_{V^0}$ 为复线性算子 知 $\exists \mu\in\mathbb{C}, \alpha\in V^0$

s.t. $B\alpha=\mu\alpha \Rightarrow \alpha$ 为 A 与 B 公共特征向量

进一步, $AB-BA\in\langle A,B\rangle$, 则可同时上三角化

设 $AB-BA=aA+bB$ 不妨设 $b\neq 0$

$(A+\frac{b}{a}B)B-B(A+\frac{b}{a}B)=a(A+\frac{b}{a}B)$ 记 $\tilde{A}=A+\frac{b}{a}B$

则 $\tilde{A}B-B\tilde{A}=a\tilde{A}$ 由推论2知 $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ $P^{-1}\tilde{A}P, P^{-1}BP$ 上三角

$\Rightarrow P^{-1}AP=P^{-1}\tilde{A}P-\frac{b}{a}P^{-1}BP$ 上三角

日期:　　　/

n维 Euclid 空间 V 中至多 $n+1$ 个向量两两夹角为钝角.

先证明满足上述性质的一族向量非0线性组合为0,则系数同号

不妨设 $k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_l\vec{\alpha}_l=k_{l+1}\vec{\alpha}_{l+1}+\cdots+k_{n+1}\vec{\alpha}_{n+1}$ $\left(\begin{array}{ll} k_i\geqslant 0 & i=1,\cdots,l. \\ k_j>0 & j=l+1,\cdots,n+1\end{array}\right)$

则 $0\leqslant(k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_l\vec{\alpha}_l|k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_l\vec{\alpha}_l)$

$=(k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_l\vec{\alpha}_l|k_{l+1}\vec{\alpha}_{l+1}+\cdots+k_{n+1}\vec{\alpha}_{n+1})$

$=\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant l\\ l+1\leqslant j\leqslant n+1}}k_ik_j(\vec{\alpha}_i|\vec{\alpha}_j)\leqslant 0$ 而 $(\vec{\alpha}_i|\vec{\alpha}_j)<0\Rightarrow k_ik_j\equiv 0\Rightarrow k_i\equiv 0$

从而 $k_{l+1}\vec{\alpha}_{l+1}+\cdots+k_{n+1}\vec{\alpha}_{n+1}=0$ $(k_j>0,\ j=l+1,\cdots,n+1)$

即系数同号.

假设存在 $n+2$ 个向量 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{n+2}$ 满足 $(\vec{\alpha}_i|\vec{\alpha}_j)<0$ $(\forall i,j)$

由 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{n+1}$ 在 V 中线性相关知 $\exists k_1,\cdots,k_{n+1}$ 不全为0

s.t. $k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_{n+1}\vec{\alpha}_{n+1}=0$ 由上述推导知 $k_1,\cdots,k_{n+1}$ 同号,不妨设均 $\geqslant 0$

则 $0=(\vec{\alpha}_{n+2}|0)=(\vec{\alpha}_{n+2}|k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_{n+1}\vec{\alpha}_{n+1})$

$=\sum\limits_{i=1}^{n+1}k_i(\vec{\alpha}_{n+2}|\vec{\alpha}_i)<0$ 矛盾 $\boxtimes$