日期:　　/

上周作业:

1、$\chi_A = \det\begin{pmatrix} t-6 & -2 & 2 \\ 2 & t-2 & -2 \\ -2 & -2 & t-2 \end{pmatrix} = (t-2)(t-4)^2$

$\chi_B = \det\begin{pmatrix} t-6 & -2 & -2 \\ 2 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix} = (t-2)(t-4)^2 \quad \lambda_1=2,\ \lambda_2=4$

对A $N(1,1) = R(1,0)+R(1,2)-2R(1,1) = 3+2-2\cdot 2=1$

$N(2,1) = R(2,0)+R(2,2)-2R(2,1) = 2$

$N(2,2)=0$　　初等因子组为$\{t-2, t-4, t-4\}$

对B $N(1,1)=1$　　$N(2,1)=0$　　$N(2,2)=1$

初等因子组为$\{t-2, (t-4)^2\}$

故$J_A = \begin{pmatrix} J_1(2) & & \\ & J_1(4) & \\ & & J_1(4) \end{pmatrix}$　$J_B = \begin{pmatrix} J_1(2) & \\ & J_2(4) \end{pmatrix}$

2、(1) 4阶幂零阵可能的Jordan标准型有

$J_4(0)$　秩为3, $\mu = t^4$

$\begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0) \end{pmatrix}$ 秩为2, $\mu = t^3$　　$\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix}$ 秩为2, $\mu = t^2$

$\begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix}$ 秩为1, $\mu = t^2$

0　秩为0, $\mu = t$

不存在秩与最小多项式相同的不同Jordan标准型　故$A \sim_s B$

(2) 不成立, 如 $A = \begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} J_3(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_3(0) \end{pmatrix}$

日期: /

3、$\vec{v}=0$ 时平凡

$\vec{v}\neq 0$ 时 $(\vec{u}+t\vec{v}|\vec{v})=0 \Rightarrow (\vec{u}|\vec{v})+t(\vec{v}|\vec{v})=0 \Rightarrow t=-\frac{(\vec{u}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}$

$(\vec{u}+t\vec{v}|\vec{u})=(\vec{u}|\vec{u})-\frac{(\vec{u}|\vec{v})^2}{(\vec{v}|\vec{v})}$

另一方面，$(\vec{u}+t\vec{v}|\vec{u})=(\vec{u}+t\vec{v}|\vec{u})+t\cdot 0=(\vec{u}+t\vec{v}|\vec{u})+t(\vec{u}+t\vec{v}|\vec{v})=(\vec{u}+t\vec{v}|\vec{u}+t\vec{v})\geqslant 0$

故 $(\vec{u}|\vec{u})-\frac{(\vec{u}|\vec{v})^2}{(\vec{v}|\vec{v})}\geqslant 0 \Rightarrow (\vec{u}|\vec{u})(\vec{v}|\vec{v})\geqslant(\vec{u}|\vec{v})^2$

即为 Cauchy 不等式.（取等 $\Leftrightarrow \|\vec{u}+t\vec{v}\|=0 \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 线性相关）

4、(a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

$=(\vec{u}+\vec{v}|\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v}|\vec{u}-\vec{v})$

$=(\vec{u}|\vec{u})+(\vec{v}|\vec{v})+(\vec{u}|\vec{u})+(\vec{v}|\vec{v})$

$=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$

(b) $(\vec{u}+\vec{v}|\vec{u}-\vec{v})=(\vec{u}|\vec{u})-(\vec{u}|\vec{v})+(\vec{v}|\vec{u})-(\vec{v}|\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0$

(c) $\frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)=\frac{1}{4}((\vec{u}|\vec{u})+(\vec{v}|\vec{v})+2(\vec{u}|\vec{v})-(\vec{u}|\vec{u})-(\vec{v}|\vec{v})+2(\vec{u}|\vec{v}))$

$=\frac{1}{4}\cdot 4(\vec{u}|\vec{v})$

$=(\vec{u}|\vec{v})$

(d) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v}|\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}|\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.$

注：取 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 即为勾股定理.

5、$\forall f\in\mathbb{C}[x]$ 由 $\begin{pmatrix}A & \\ & A\end{pmatrix}\sim_s\begin{pmatrix}B & \\ & B\end{pmatrix}$ 知 $f\left(\begin{pmatrix}A & \\ & A\end{pmatrix}\right)\sim_s f\left(\begin{pmatrix}B & \\ & B\end{pmatrix}\right)$

日期: /

即 $\begin{pmatrix} f(A) & \\ & f(A) \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} f(B) & \\ & f(B) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2\operatorname{rank} f(A) = 2\operatorname{rank} f(B)$

$\Rightarrow \operatorname{rank} f(A) = \operatorname{rank} f(B)$

从而 $R_A(i,j) = R_B(i,j) \Rightarrow A$ 与 B Jordan标准型相同 $\Rightarrow A \sim_s B$

(直接讨论Jordan块个数也可)

日期: /

1. $\forall A\in GL_n(\mathbb{R})$

Schmidt 正交化实际提供了一系列上三角列变换将A变换为正交阵

$\exists$ 对角元均为正的上三角可逆阵R与正交阵Q s.t. $A=QR$

称为矩阵的QR分解.(A不可逆时也有QR分解,此时R仅是上三角,分解可能不唯一)

证明QR分解另一思路:反射(以下设 $n>1$)

$\forall \vec{w}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{w}^t\vec{w}=1$, 记 $H_{\vec{w}}=E-2\vec{w}\vec{w}^t$ 称为Householder矩阵

则 $H_{\vec{w}}(\vec{w})=-\vec{w}$; $\forall X\in\langle\vec{w}\rangle^{\perp}$ $H_{\vec{w}}X=X$ 故 $H_{\vec{w}}$ 为反射

$H_{\vec{w}}^t=H_{\vec{w}}$ $H_{\vec{w}}^tH_{\vec{w}}=(E-2\vec{w}\vec{w}^t)^2=E\Rightarrow H_{\vec{w}}$ 正交(实际上由保距性也可知其正交)

正交算子几何意义:保距算子. $\forall X\in\mathbb{R}^n$ $\|AX\|=\|X\|\Leftrightarrow X^tA^tAX=X^tX$

$\Leftrightarrow\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$, $X^tA^tAY=X^tY$ (极化) $\Leftrightarrow A^tA=E_n$

$H_{\vec{w}}$ 性质: $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n$, $\|\vec{\alpha}\|=\|\vec{\beta}\|$, 则 $\exists\vec{w}$ s.t. $H_{\vec{w}}\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ 时显然,下设 $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$

从几何上理解即 $\|\vec{\alpha}\|=\|\vec{\beta}\|$ 时存在超平面 s.t. $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 关于超平面对称,故取

$$\vec{w}=\frac{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\|}$$

从矩阵理解: $(E-\vec{w}\vec{w}^t)\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

$$\vec{\alpha}-\vec{w}\vec{w}^t\vec{\alpha}=\vec{\beta}$$

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(\vec{w}^t\vec{\alpha})\vec{w}$$

故 $\vec{w}$ 与 $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 共线. 取 $\vec{w}=\frac{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\|}$ 验证可知 $H_{\vec{w}}\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

设 $A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n)$ $\exists w_1$ s.t. $H_{w_1}\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\|\vec{\alpha}_1\|\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 归纳可得QR分解

日期:　　/

QR分解唯一性：若 $Q_1, Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$，$R_1, R_2$ 为可逆上三角矩阵

且 R_1, R_2 对角元均为正数，s.t. $Q_1R_1 = Q_2R_2$

$Q_1R_1 = Q_2R_2 \Rightarrow Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$

故 $Q_2^{-1}Q_1$ 为正交上三角矩阵

由列为标准正交基知 $Q_2^{-1}Q_1$ 为对角阵且对角元为 ± 1

由 R_1 对角元均为正数 $\Rightarrow R_1^{-1}$ 对角元均为正数

从而 $R_2R_1^{-1}$ 对角元均为正数，即 $Q_2^{-1}Q_1 \Rightarrow Q_2^{-1}Q_1 = E_n$

推论：任一正交算子可分解为反射的乘积.

2、正交投影性质：若 $\pi: V \to V_1$ 为正交投影.

则 $\forall \alpha \in V$，$\|\alpha\| \geq \|\pi(\alpha)\|$ 取等 $\Leftrightarrow \alpha \in V_1$；$\forall \beta \in V_1$，$(\alpha|\beta) = (\pi(\alpha)|\beta)$

证明：$(\alpha - \pi(\alpha)) \perp V_1 \Rightarrow (\alpha - \pi(\alpha)) \perp \pi(\alpha)$，$(\alpha - \pi(\alpha)|\beta) = 0 \Rightarrow (\alpha|\beta) = (\pi(\alpha)|\beta)$

由勾股定理知 $\|\alpha\| = \|\pi(\alpha)\| + \|\alpha - \pi(\alpha)\| \geq \|\pi(\alpha)\|$

取等 $\Leftrightarrow \alpha - \pi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in V_1$

V 为 Euclid 空间，V_1, V_2 为 V 的子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$ 记 P_1, P_2 为

V 到 V_1, V_2 的正交投影设 $P = P_1 + P_2$，证明 $0 < \det P \leq 1$.

证明：设 $\dim V_1 = m$，$\dim V_2 = n$

取 V_1, V_2 的基并为 V 的基，则 P 在该基下矩阵为 $\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}$

日期: /

其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为 $P_2|_{V_1}$ 与 $P_1|_{V_2}$ 的矩阵.

$$\det P=\det\begin{pmatrix}E_m & B\\ A & E_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}E_m & B\\ 0 & E_n-AB\end{pmatrix}=\det(E_n-AB)$$

E_n-AB 为 $\varepsilon_{V_2}-P_2|_{V_1}\circ P_1|_{V_2}\in\mathcal{L}(V_2)$ 的矩阵.

由 P_2 为正交投影知 $\forall\alpha,\beta\in V_2$

$$\begin{aligned}&(P_2|_{V_1}\circ P_1|_{V_2}(\alpha)|\beta)\\ &=(P_2\circ P_1(\alpha)|\beta)\\ &=(P_1(\alpha)|\beta)\\ &=(P_1(\alpha)|P_1(\beta))\\ &=(\alpha|P_1(\beta))\\ &=(\alpha|P_2\circ P_1(\beta))\end{aligned}$$

从而 $P_2\circ P_1$ 为 $P_2\circ P_1$ 自伴随算子 $\Rightarrow AB=(AB)^t\Rightarrow$ 特征值均为实数

故只须证 $\forall AB$ 特征值 λ, $0\le\lambda<1$

$\forall AB$ 特征值 λ, 则 $\exists\alpha\in V_2\setminus\{0\}$ s.t. $P_2|_{V_1}\circ P_1|_{V_2}\alpha=\lambda\alpha$

(实际上即二次投影后同向且范数减小)

$(P_2\circ P_1(\alpha)|\alpha)\ge0\Rightarrow(\lambda\alpha|\alpha)\ge0\Rightarrow\lambda(\alpha|\alpha)\ge0\Rightarrow\lambda\ge0$

$\|P_2\circ P_1(\alpha)\|\le\|P_1(\alpha)\|\le\|\alpha\|$

$\Rightarrow\ |\lambda|\,\|\alpha\|\le\|\alpha\|\Rightarrow|\lambda|\le1$ 取等 $\Leftrightarrow\alpha\in V_1$ 且 $P_1(\alpha)\in V_2$

$\Leftrightarrow\alpha\in V_1\cap V_2=\{0\}$

日期: /

故无法取等 $\Rightarrow \lambda < 1$

故 $0 \leq \lambda < 1$ $\quad E-AB$ 特征值 $\in (0,1]$

$0 < \det(E-AB) \leq 1$