日期:　　/

上周作业

1、(i) $(E_{ij}|E_{kl}) = tr(E_{ij}^t E_{kl}) = tr(E_{ji}E_{kl}) = \begin{cases} 1 & (i,j)=(k,l) \\ 0 & (i,j)\neq(k,l) \end{cases}$

故 E_{ij} 为单位正交基.

(ii) $1, x, x^2, x^3$ 为 $\mathbb{R}[x]^{(4)}$ 的基

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{(\int_0^1 1^2 dx)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{x-(x|1)1}{\|x-(x|1)1\|} = \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx}} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{x^2-x+\frac{1}{6}}{(\int_0^1 (x^2-x+\frac{1}{6})^2 dx)^{\frac{1}{2}}} = 6\sqrt{5}(x^2-x+\frac{1}{6})$$

$$\varepsilon_4 = \frac{x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{20}}{(\int_0^1 (x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{20})^2 dx)^{\frac{1}{2}}} = 20\sqrt{7}(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{20})$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 为单位正交基

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow$ 基础解系为 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$

$\frac{1}{2}\varepsilon_1, \frac{1}{2}\varepsilon_2$ 为 U 的单位正交基

2、$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $A_1^t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A_2^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $U^\perp$ 的一组基

$$\varepsilon_1 = \frac{A_2^t}{\|A_2^t\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \frac{A_1^t - (A_1^t|\varepsilon_1)\varepsilon_1}{\|A_1^t - (A_1^t|\varepsilon_1)\varepsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

日期:　　　/

3、(i) 将 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_m$ 扩充为 V 的单位正交基 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$

则 $\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{e}_i|\vec{u})\vec{e}_i$

$(\vec{u}|\vec{u})=\sum_{i=1}^{n}(\vec{e}_i|\vec{u})^2\geq\sum_{i=1}^{m}(\vec{e}_i|\vec{u})^2$

(ii) 若 $\vec{u}\in\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_m\rangle$，则 $(\vec{u}|\vec{e}_j)=0\ (j>m)$

$\Rightarrow(\vec{u}|\vec{u})=\sum_{i=1}^{n}(\vec{e}_i|\vec{u})^2=\sum_{i=1}^{m}(\vec{e}_i|\vec{u})^2$

注：由 $\left(\vec{u}-\sum_{i=1}^{m}(\vec{u}|\vec{e}_i)\vec{e}_i\,\middle|\,\vec{e}_j\right)=0\ (j=1,\cdots,m)$ 可知 $\sum_{i=1}^{m}(\vec{u}|\vec{e}_i)\vec{e}_i$ 为 $\vec{u}$ 在 $\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_m\rangle$ 中正交投影，故上式对无穷维也成立，称为Bessel不等式与Parserval等式.

4、由 $U_1\cap U_2\subset U_1$ 知 $(U_1\cap U_2)^\perp\supset U_1^\perp$ 同理 $(U_1\cap U_2)^\perp\supset U_2^\perp$

$\Rightarrow(U_1\cap U_2)^\perp\supset U_1^\perp+U_2^\perp$

反之，由 $U_1^\perp+U_2^\perp\supset U_1^\perp\Rightarrow(U_1^\perp+U_2^\perp)^\perp\subset(U_1^\perp)^\perp=U_1$

同理 $(U_1^\perp+U_2^\perp)^\perp\subset U_2\Rightarrow(U_1^\perp+U_2^\perp)^\perp\subset U_1\cap U_2$

$\Rightarrow U_1^\perp+U_2^\perp\supset(U_1\cap U_2)^\perp$

注：对元素讨论或取 $U_1\cap U_2$ 的基扩充为 U_1,U_2 的基后对基讨论也可，但 $V\backslash U_1$ 不为线性空间，不可直接进行集合的讨论.

5、设 $\vec{u}$ 为 P 属于 λ 的复特征向量，用 $\vec{u}^*$ 表示共轭转置

则 $P\vec{u}=\lambda\vec{u}$　　$\vec{u}^*P^t=\bar{\lambda}\vec{u}^*$

日期:　　　/

$\Rightarrow \quad \vec{u}^* P^t P\vec{u} = \vec{u}^*\vec{u} = \lambda\bar{\lambda}\,\vec{u}^*\vec{u} \Rightarrow \lambda\bar{\lambda}=1 \Rightarrow |\lambda|=1$

实际上 $P \sim_o \mathrm{diag}(N(\cos\theta_1,\sin\theta_1),\cdots,N(\cos\theta_s,\sin\theta_s),\pm1,\cdots,\pm1)$

故特征根模长为1.

(ii) 法一: 设 $\lambda = a+bi\ (a^2+b^2=1, b\neq 0)$

$P(\vec{u}+\vec{v}i) = (a+bi)(\vec{u}+\vec{v}i)$

$\Rightarrow \begin{cases} P\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{v} \\ P\vec{v} = b\vec{u} + a\vec{v} \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{u}^t P^t P\vec{u} = a^2\vec{u}^t\vec{u} - 2ab\vec{u}^t\vec{v} + b^2\vec{v}^t\vec{v}$

$\vec{u}^t P^t P\vec{v} = ab\vec{u}^t\vec{u} + (a^2-b^2)\vec{u}^t\vec{v} - ab\vec{v}^t\vec{v}$

$\Rightarrow \begin{cases} b^2(\vec{u}^t\vec{u} - \vec{v}^t\vec{v}) = -2ab\vec{u}^t\vec{v} \\ 2b^2\ \vec{u}^t\vec{v} \qquad = ab(\vec{u}^t\vec{u} - \vec{v}^t\vec{v}) \end{cases}$

由 $b\neq 0 \Rightarrow -2a^2\vec{u}^t\vec{v} = ab(\vec{u}^t\vec{u} - \vec{v}^t\vec{v}) = 2b^2\vec{u}^t\vec{v}$

$\Rightarrow 2\vec{u}^t\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}^t\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}^t\vec{u} - \vec{v}^t\vec{v} = 0$

故 $\vec{u}^t\vec{v} = 0,\ \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

法二: $(\vec{u}+i\vec{v})^t P^t P(\vec{u}+i\vec{v}) = (\vec{u}+i\vec{v})^t(\vec{u}+i\vec{v}) = \lambda^2(\vec{u}+i\vec{v})^t(\vec{u}+i\vec{v})$

$\Rightarrow (1-\lambda^2)(\vec{u}+i\vec{v})^t(\vec{u}+i\vec{v})=0$

由$\lambda\notin\mathbb{R}$知$1-\lambda^2\neq 0 \Rightarrow (\vec{u}+i\vec{v})^t(\vec{u}+i\vec{v})=0$

$\Rightarrow (\vec{u}^t\vec{u}-\vec{v}^t\vec{v})+2i\vec{u}^t\vec{v}=0$

$\Rightarrow \|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|,\ \vec{u}^t\vec{v}=0$

另一种同时合同：A,B半正定，则$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. P^tAP, P^tBP对角

证明：由A,B半正定知$A+B$半正定，$\exists P_1\in GL_n(\mathbb{R})$

s.t. $P_1^t(A+B)P_1=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 记$A_1=P_1^tAP,\ B_1=P_1^tBP$

则 $A_1+B_1=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

又 $(A_1+B_1)X=0\Leftrightarrow X\in\langle e_{r+1},\cdots,e_n\rangle$

$\Updownarrow$

$X^t(A_1+B_1)X=0\Leftrightarrow X^tA_1X+X^tB_1X=0\Leftrightarrow X^tA_1X=X^tB_1X=0\Leftrightarrow A_1X=B_1X=0$

故A_1,B_1后$n-r$列为0

又由A_1,B_1对称知$\exists A_2,B_2\in SM_r(\mathbb{R})$,

s.t. $A_1=\begin{pmatrix}A_2&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}B_2&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A_2+B_2=E_r$

$\exists P_2\in O_r(\mathbb{R})$ s.t. $P_2^tA_2P_2$对角，此时$P_2^tB_2P_2=E_r-P_2^tA_2P_2$对角

故取 $P=P_1\begin{pmatrix}P_2&\\&E_{n-r}\end{pmatrix}$ 则P^tAP, P^tBP均为对角阵.

日期: /

同时合同应用:

1、A正定,证明 $0\le X^t(A+XX^t)^{-1}X<1$ $(X\in\mathbb{R}^n)$ (第七次习题课)

$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $PAP^t=E_n$, PXX^tP^t对角

$$X^t(A+XX^t)^{-1}X$$

$$=X^tP^t(P^t)^{-1}(A+XX^t)^{-1}P^{-1}PX$$

$$=(PX)^t(PAP^t+PXX^tP^t)^{-1}PX$$

$$=(PX)^t(E_n+PX(PX)^t)^{-1}PX$$

设 $PX=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 由 $PX(PX)^t$ 对角知 $x_ix_j=0\ (i\ne j)\Rightarrow x_i$中至多1个非0

不妨设 $x_2=\cdots=x_n=0$, 则

$$(PX)^t(E_n+(PX)(PX)^t)^{-1}PX$$

$$=x_1e_1^t\begin{pmatrix}\frac{1}{1+x_1^2}&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}x_1e_1$$

$$=\frac{x_1^2}{1+x_1^2}$$

故 $0\le X^t(A+XX^t)^{-1}X<1$

2、设A,B半正定,证明 $(\det(A+B))^2\ge 2^{2n}\det A\det B$

由A,B半正定知 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^tAP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ $P^tBP=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}$

$LHS=\frac{1}{(\det P)^4}\cdot\prod_{i=1}^n(\lambda_i+\mu_i)^2\ge\frac{1}{(\det P)^4}\prod_{i=1}^n 2\lambda_i\mu_i$

$RHS=2^{2n}\frac{1}{(\det P)^4}\prod_{i=1}^n\lambda_i\mu_i$ 故不等式成立

日期: /

3、A, B正定若 A-B 正定,则 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定

$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^tAP=E_n$, $P^tBP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

则 A-B正定 $\Rightarrow 1-\lambda_i>0$

$B^{-1}-A^{-1}\sim_c \begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}-E_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n}-1\end{pmatrix}$ 正定

4、(本周习题) $A\in SM_n(\mathbb{R})$ 半正定,则 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, $\exists$唯一 B半正定 s.t. $A=B^k$

存在性为作业,这里证明唯一性

若 $A=B^k=C^k$, B, C半正定,

设 A 的不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ $(\lambda_i\geq 0)$,分别为$k_1,\cdots,k_s$阶

则 B, C 的特征值均为 $\sqrt[k]{\lambda_1},\cdots,\sqrt[k]{\lambda_s}$ 且对应阶数为$k_1,\cdots,k_s$阶

故 $\exists P, Q\in O_n(\mathbb{R})$

s.t. $P^tBP=Q^tCQ=\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s}E_{k_s}\end{pmatrix}$

$B^k=C^k\Rightarrow P\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s}E_{k_s}\end{pmatrix}^kP^t=Q\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s}E_{k_s}\end{pmatrix}^kQ^t$

$\Rightarrow Q^tP\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s}E_{k_s}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1}E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s}E_{k_s}\end{pmatrix}^kQ^tP$

日期: /

即 Q^tP 与 $\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{k_s} \end{pmatrix}$ 可交换 $\Rightarrow Q^tP$ 为分块对角阵 $\begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_s \end{pmatrix}$

其中 X_i 为 k_i 阶

$$\Rightarrow Q^tBP = Q^tP\begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s} E_{k_s} \end{pmatrix}P^tP$$

$$= \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s} E_{k_s} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s} X_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} E_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_s} E_{k_s} \end{pmatrix}Q^tP$$

$$= Q^tCP$$

故 $B=C$ 即 $X^k=A$ 的半正定解唯一.