1. $\mathcal{A}\in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^n)$，若$f\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ s.t. $f(\mathcal{A})=0$，称f为$\mathcal{A}$的零化多项式

α为$\mathbb{F}$的代数元，若$f\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ s.t. $f(\alpha)=0$，称f为α的零化多项式

$\mathcal{A}\in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^n)$，$\alpha\in\mathbb{F}^n$，若$f\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$，s.t. $f(\mathcal{A})\alpha=0$，称f为α关于$\mathcal{A}$的零化多项式

次数最小的零化多项式称为最小多项式，记为$m_{\mathcal{A}}$，m_α，$m_{\mathcal{A},\alpha}$

①最小多项式整除零化多项式

②(第二次作业) 若$g(t)\in\mathbb{F}[t]$满足$g(\mathcal{A})=0$且t在g中重数不大于1，

则$\mathbb{F}^n=\ker\mathcal{A}\oplus \mathrm{im}\mathcal{A}$

③$\exists\alpha\in\mathbb{F}^n$ s.t. $m_{\mathcal{A},\alpha}=m_{\mathcal{A}}$

①证明：对任一零化多项式f

$$f=q\,m_{\mathcal{A}}+r\quad(\deg r<\deg m_{\mathcal{A}})$$

则$f(\mathcal{A})=q\,m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})$

$$r(\mathcal{A})=0$$

而$\deg r<\deg m_{\mathcal{A}}$，故$r=0$

即$m_{\mathcal{A}}\mid f$

2. $\forall\alpha\in\ker\mathcal{A}\cap\mathrm{im}\mathcal{A}$

则$\exists\beta\in\mathbb{F}^n$ s.t. $\mathcal{A}\beta=\alpha$ 且 $\mathcal{A}\alpha=0$

故$\mathcal{A}^2\beta=0\Rightarrow m_{\mathcal{A},\beta}\mid t^2$

又 $m_{A,\beta} \mid g(t) \Rightarrow m_{A,\beta} \mid \gcd(g, t^2)$

由 $t^2 \nmid g(t)$ 知 $m_{A,\beta} \mid t \Rightarrow A\beta = 0$ 即 $\alpha = 0$

又由 $\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = n$ 知

$\mathbb{F}^n = \ker A \oplus \operatorname{im} A$

③ 先证明若 $m_{A,\alpha}, m_{A,\beta}$ 互素 则 $m_{A,\alpha+\beta} = m_{A,\alpha} \cdot m_{A,\beta}$

1) $m_{A,\alpha} m_{A,\beta}(A)(\alpha+\beta) = m_{A,\alpha} m_{A,\beta}(A)\alpha + m_{A,\alpha} m_{A,\beta}(A)\beta = 0$

2) 由 $m_{A,\alpha}, m_{A,\beta}$ 互素 知 $\exists u, v \in \mathbb{F}[x]$ s.t.

$u m_{A,\alpha} + v m_{A,\beta} = 1$

故 $u m_{A,\alpha}(A)\alpha + v m_{A,\beta}(A)\alpha = \alpha$

$v m_{A,\beta}(A)\alpha = \alpha$

又由 $m_{A,\alpha+\beta}(A)(\alpha+\beta) = 0$

$v m_{A,\beta} m_{A,\alpha+\beta}(A)(\alpha+\beta) = 0$

$v m_{A,\beta} m_{A,\alpha+\beta}(A)\beta = 0$

$m_{A,\alpha+\beta}(A)\beta = 0 \Rightarrow m_{A,\beta} \mid m_{A,\alpha+\beta}$

同理 $m_{A,\alpha} \mid m_{A,\alpha+\beta}$ 又由 $m_{A,\alpha}, m_{A,\beta}$ 互素

$\Rightarrow m_{A,\alpha} \cdot m_{A,\beta} \mid m_{A,\alpha+\beta}$

lemma 得证

设 $m_A=p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}$ 其中 p_i 不可约, $k_i>0$

由 $m_A(A)=0$ 知 $\mathbb{F}^n=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker p_i^{k_i}(A)$

假设 $\exists i\in[s]$ s.t. $\ker p_i^{k_i}(A)=\ker p_i^{k_i-1}(A)$

则 $\forall X\in\mathbb{F}^n$ $p_i^{k_i}(p_1^{k_1}\cdots p_{i-1}^{k_{i-1}}p_{i+1}^{k_{i+1}}\cdots p_s^{k_s})(A)X=0$

$\Rightarrow (p_1^{k_1}\cdots p_{i-1}^{k_{i-1}}p_{i+1}^{k_{i+1}}\cdots p_s^{k_s})(A)X\in\ker p_i^{k_i}(A)=\ker p_i^{k_i-1}(A)$

$\Rightarrow\quad p_i^{k_i-1}(p_1^{k_1}\cdots p_{i-1}^{k_{i-1}}p_{i+1}^{k_{i+1}}\cdots p_s^{k_s})(A)X=0$

由 X 任意性知 $p_1^{k_1}\cdots p_{i-1}^{k_{i-1}}p_i^{k_i-1}p_{i+1}^{k_{i+1}}\cdots p_s^{k_s}(A)=0$

与 m_A 最小矛盾

故 $\exists\alpha_i\in\ker p_i^{k_i}(A)\setminus\ker p_i^{k_i-1}(A)$

由 lemma 知 $m_{A,\alpha_1+\cdots+\alpha_s}=\prod_{i=1}^{s}m_{A,\alpha_i}=m_A$ $\boxed{//}$

2、$f\in\mathbb{Z}[x]$, 若 $\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}$ (其中 p,q 互素) 为 f 的根

$f=a_nx^n+\cdots+a_0$ $(a_n\neq0)$ 则 $p\mid a_n$, $q\mid a_0$

证明: $f(\frac{q}{p})=0\Rightarrow a_n(\frac{q}{p})^n+\cdots+a_0=0$

$a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}p+\cdots+a_0p^n=0$

故 $p\mid a_nq^n$ 由 $\gcd(p,q)=1$ 知 $p\mid a_n$

考虑多项式 $\tilde{f}=x^nf(\frac{1}{x})=a_0x^n+\cdots+a_n$ 则 $q\mid a_0$

3、对 $f=a_nx^n+\cdots+a_0\in\mathbb{F}[x]$ $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$

定义 $f'=na_nx^{n-1}+\cdots+a_1$

则 ① $(f+g)'=f'+g'$　$(fg)'=f'g+fg'$

②若不可约多项式p为f的k重因式，则p为f'的$k-1$重因式

③ $f\in\mathbb{R}[x]$ n个根均为实数，则f' $n-1$个根均为实数且

p为f'的重根 $\Rightarrow$ p为f的重根

①略

② 设$f=p^k m$　$(p,m)=1$

则$f'=kp^{k-1}p'm+p^k m'$

$=p^{k-1}(kp'm+pm')$

由p不可约知 $(p',p)=1$，又由$(p,m)=1$

$\Rightarrow (p,kp'm)=1$

而$p\mid pm' \Rightarrow p\nmid kp'm+pm'$

故 $\mathrm{mult}_p(f')=k-1$

③ 设f的根为$x_1<x_2<\cdots<x_s$，其中x_i为k_i重

由Rolle中值定理知$\exists y_1,\cdots,y_{s-1}$ s.t. $y_i\in(x_i,x_{i+1})$

s.t. $f'(y_i)=0$ $(i=1,2,\cdots,s-1)$ 设y_i为s_i重根 $(s_i\geq 1)$

则 $\sum_{i=1}^{s}(k_i-1)+\sum_{i=1}^{s-1}s_i=n-1$

$\sum_{i=1}^{s-1}s_i=s-1 \Rightarrow s_i=1$

故f' $n-1$个根均为实数且p为f'的重根 $\Rightarrow$ p为f的重根