1. 上周作业

i) $f = (x_1x_2-1)^2 + (x_3x_4+1)^2 + 2x_1x_2$

$= x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2 \cancel{-2x_1x_2} + 2x_3x_4 + 2$

$\deg f = 4$ not 10

ii) $f, g \in F[x]\setminus\{0\}$, F 是域. h 是 f, g 之间最小的公倍式, 则 h 是 f, g 的最小公倍式.

Pf: h 是 f, g 最小公倍式 $\overset{\text{Def}}{\iff}$ $\forall h'$ with $f \mid h'$, $g \mid h'$ $\Rightarrow$ $h \mid h'$

反证 若 $h \nmid h'$, 由带余除法 $h' = hq + r$ $\deg r < \deg h$

注意到 $f \mid r = h' - hq$ $g \mid r = h' - hq$ 即 r 也是 f, g 的公倍式. 且次数小于 h

矛盾 $\Rightarrow h \mid h'$

iii) $(x^3+2x^2+2x+1,\ x^2+2x) = (x(x^2+2x)+2x+1,\ x^2+2x)$

$= (2x+1,\ x^2+2x)$

in $\mathbb{Q}[x]$

$= (2x+1,\ (2x+1)(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}) - \frac{3}{4})$

$= (2x+1,\ -\frac{3}{4})$

$= 1$

or in $\mathbb{Z}_3[x]$

$= (-x+1,\ x^2-x)$

$= x-1$

iii) 线性映射 $A: F^2 \to F^2$ 在基 $\{e_1, e_2\}$ 下的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \triangleq A$

$f(A) = 0 \iff f(A) = 0$

- 对 $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ $f(A) := a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_0 I$ — I 单位阵
- $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$ $\Rightarrow$ $f = x^2+1$

2. 多项式的形式导数

Def: D为整环. $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in D[x]$, 记

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

称作 f 的形式导数

3. 形式导数与根的关系

prop: 设 D是整环. $f(x)\in D[x]$ $a\in D$

(1) a 是 $f(x)$ 的 n 重根 $\Rightarrow f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$

(2) 若 D的特征为0, 则

$$f(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad f^{(n)}(a)\neq 0 \Rightarrow a \text{ 是 } f \text{ 的 } n \text{ 重根}$$

(3) 若 D是域 则 $(f',f)=1 \Rightarrow f$ 在D上无重根

Pf: (1) a 是 f 的 n重根 $\Rightarrow f(x)=(x-a)^ng(x)$

$$\xRightarrow[(\alpha\beta)'=\alpha'\beta+\alpha\beta']{(\alpha+\beta)'=\alpha'+\beta'} f'(x)=n(x-a)^{n-1}g(x)+(x-a)^ng'(x)$$
$$=(x-a)^{n-1}(ng(x)+(x-a)g'(x))$$

$$\xRightarrow{\text{对n归纳}} f(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$$

(2) D的特征为0时.

$$f(x)=f(x-a+a)=b_m(x-a)^m+\cdots+b_1(x-a)+b_0$$

则 $f(a)=b_0, f'(a)=b_1,\cdots, f^{(m)}(a)=m!\,b_m$

$$\xRightarrow{\mathrm{char}(D)=0} b_0=\cdots=b_{n-1}=0 \quad b_n\neq 0$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-a)^n(b_n+b_{n+1}(x-a)+\cdots+b_m(x-a)^{m-n})$$
$$=(x-a)^ng(x)$$

且 $g(a)=b_n\neq 0$

(3) 若 a为 f 的重根, 由(1), 立得 $x-a \mid (f',f)$

Example: in $F_p[x]$ (p是素数(特征)) $f=(x^p+1)(x^p-1)$ $f'=px^{p-1}(x^p-1)+px^{p-1}(x^p+1)=0$

but $f=(x-1)^p(x+1)^p$

$-1,1$ 是 f 的 n重根 (也给出了(2)中特征非0时的反例)

No.
Date

4. 设 p 为素数 $f\in\mathbb{Z}[x]$，$p\nmid f$ 的首项系数，则 $\bar{f}$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ 不可约 $\Rightarrow f$ in $\mathbb{Z}[x]$ 不可约

pf：反证即可

Rmk：$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$　$\bar{f}(x):=\bar{a}_nx^n+\cdots+\bar{a}_0\in\mathbb{F}_p[x]$

5.（练习）设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{Z}[x]$　$\deg f=n$．若存在素数 p，正整数 k．s.t.（$0<k\le n$）

$p\nmid a_n$　$p\nmid a_k$　$p\mid a_i$　$(0\le i\le k-1)$　$p^2\nmid a_0$

则　$f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中必存在次数 $\ge k$ 的不可约因子

pf：（本质上是仿照 Eisenstein 判别法的证明）

反证　设 $f=\alpha_1\cdots\alpha_s$　　$\deg\alpha_i<k$

记　$\alpha_i(x)=\alpha_i^{d_i}x^{d_i}+\alpha_i^{d_i-1}x^{d_i-1}+\cdots+\alpha_i^0$　　$d_i=\deg\alpha_i<k$

・$p\nmid a_n=\alpha_1^{d_1}\alpha_2^{d_2}\cdots\alpha_s^{d_s}\Rightarrow p\nmid\alpha_i^{d_i}$　（$\alpha_i^{d_i}$ 中 i 是指标，不是幂次）

i.e $p\nmid f(x)\Rightarrow$ ~~$p\nmid\alpha_i(x)$~~　$\deg\bar{\alpha}_i=\deg\alpha_i$

・$p^2\nmid a_0$，$p\mid a_0$，$a_0=\alpha_1^0\alpha_2^0\cdots\alpha_s^0\Rightarrow$ 不妨设 $p\mid\alpha_1^0$，$p^2\nmid\alpha_1^0$，$p\nmid\alpha_2^0,\cdots,p\nmid\alpha_s^0$

・考虑模 p in $\mathbb{Z}_p[x]$

$\bar{f}=\bar{a}_nx^n+\bar{a}_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k$

$\bar{\alpha}_1=\bar{a}_1^{d_1}x^{d_1}+\cdots+\bar{a}_1^1x^1$

$\bar{\alpha}_i=\bar{a}_i^{d_i}x^{d_i}+\cdots+\bar{a}_i^1x^1+\bar{a}_i^0$

注意到　$x^k\mid\bar{f}=\bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_s$　　$x\nmid\bar{\alpha}_2,\cdots\bar{\alpha}_s$　　x 是 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中素元

$\Rightarrow$　$x^k\mid\bar{\alpha}_1$　$\Rightarrow$　$\deg\alpha_1\ge k$　矛盾　　□

6.（拉格朗日）D 是整环　$f\in D[x]$　$\deg f=n\Rightarrow f$ 在 D 中的根不超过 n 个．

Rmk：若 D 不是交换环．则 上述命题不对．

Example：四元数体 $\mathbb{H}=\{a+bi+cj+dk\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}$，$i^2=j^2=k^2=-1$，$i\cdot j=-j\cdot i=k$，$j\cdot k=-k\cdot j=i$，$k\cdot i=-i\cdot k=j\}$

x^2+1 in $\mathbb{H}[x]$ 有无数个根　$bi+cj+dk$ with $b^2+c^2+d^2=1$．