日期: /

1. 记 $\{x_n\}$ 为复值数列 x_n，在复值数列全体上定义加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$

与数乘 $k\{a_n\}=\{ka_n\}$

(1) 证明复值数列全体 V 为线性空间

(2) 验证子集 $\{\{a_n\}\in V \mid a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, n=2,3,\cdots\}$ 为子空间，并求Fibonacci

数列通项公式

(1) 略

(2) 记 $U=\{\{a_n\} \mid a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, n=2,3,\cdots\}$

则 $U\neq\phi$，$\forall \{a_n\}\{b_n\}\in U$，$k,l\in\mathbb{C}$

$ka_{n+1}+lb_{n+1}=k(a_n+a_{n-1})+l(b_n+b_{n-1})=(ka_n+lb_n)+(ka_{n-1}+lb_{n-1})$

故 $ka_{n+1}+lb_{n+1}\in U \Rightarrow U$ 为子空间

取 $\{x_n\}\{y_n\}\in U$ s.t. $x_1=0$, $x_2=1$; $y_1=1$, $y_2=0$.

则 $\forall \{a_n\}\subset U$, $a_n=a_1y_n+a_2x_n$ 且 $kx_n+ly_n=0 \Rightarrow \begin{matrix} kx_1+lx_2=0 \\ ky_1+ly_2=0 \end{matrix} \Leftrightarrow k=l=0$

故 $\dim U=2$

考虑若等比数列 $x_n=q^n\in U$，则 $q^{n+1}=q^n+q^{n-1} \Rightarrow q^2-q-1=0 \Rightarrow q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

故 U 有基 $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ $\left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

$$\begin{cases} A\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}+B\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ B=-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

故通项公式为 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

日期:　　/

2、设 $V_1,\cdots,V_n$ 为 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的真子空间，$\mathbb{F}$ 为无限域。

(1) 证明 $\bigcup_{k=1}^{n} V_k \neq V$

(2) 设 $f_1,\cdots,f_n \in Hom(V,\mathbb{F})$ 且 $f_i \neq 0\,(i=1,2,\cdots,n)$ 证明 $\exists \alpha \in V$ s.t. $f_i(\alpha)\neq 0\,(i=1,2,\cdots,n)$

(1) 法一：证明：对 n 归纳，$n=1$ 时显然

若 $n=k$ 时成立，$n=k+1$ 时，假设 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_i$

由归纳假设，$\exists \alpha \in V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i$；由 V_{k+1} 为真子空间知 $\exists \beta \in V\setminus V_{k+1}$

故 $\alpha \in V_{k+1}$，$\beta \in \bigcup_{i=1}^{k} V_i$

考虑集合 $\{k\alpha+\beta \mid k\in\mathbb{F}\}$，若 $\exists k$ s.t. $k\alpha+\beta\in V_{k+1} \Rightarrow \beta = k\alpha+\beta-k\alpha \in V_{k+1}$ 矛盾。

由抽屉原理知 $\exists i\in[k]$ s.t. V_i 中有至少 2 个 $\{k\alpha+\beta \mid k\in\mathbb{F}\}$ 中点

即 $\exists k_1,k_2\in\mathbb{F}$，$k_1\neq k_2$，且 $k_1\alpha+\beta, k_2\alpha+\beta \in V_i \Rightarrow \alpha=\frac{1}{k_1-k_2}\left((k_1\alpha+\beta)-(k_2\alpha+\beta)\right)\in V_i$

与 $\alpha\notin V_i$ 矛盾。故 $V\neq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

综上，$\bigcup_{k=1}^{n} V_k = V$

法二：（要求 $\dim V = s < \infty$）

考虑向量族 $A=\left\{\alpha_a=\begin{pmatrix}1\\ a\\ a^2\\ \vdots\\ a^{s-1}\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{F}\right\}$

则 A 中任意 s 个向量线性无关 $\Rightarrow |V_i \cap A| \leq s-1$

假设 $V=\bigcup_{k=1}^{n} V_i$，则 $A\subset V=\bigcup_{k=1}^{n} V_i \Rightarrow A=\bigcup_{k=1}^{n}(A\cap V_i) \Rightarrow |A|\leq n(s-1)$

矛盾。

Remark: $|\mathbb{F}|<\infty$ 时不成立，如 $\mathbb{F}^n=\bigcup_{\alpha\in\mathbb{F}^n}\langle\alpha\rangle$

(2) 证明：$f_i\neq 0\Rightarrow \ker f_i\subsetneq V$

由(1)知 $\bigcup_{k=1}^{n}\ker f_i\subsetneq V$

即 $\exists\alpha\in V$ s.t. $\alpha\notin\bigcup_{k=1}^{n}\ker f_i\Rightarrow f_i(\alpha)$ 均不为0

3、(Lagrange 插值) $a_1,\cdots,a_n$ 互不相同, $b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{F}$

证明 $\exists!\ f\in\mathbb{F}[x]$ $\deg f<n$ 且 $f(a_i)=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

证明: $\mathbb{F}[x]^{(n)}$ 为 n 维子空间，若 $f_i(a_j)=\delta_{ij}$，由 $x-a_j\mid f_i$ 且 $f_i(a_i)=1$ 知 $f_i=\dfrac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$

则 $k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0\Rightarrow k_1f_1(a_i)+\cdots+k_nf_n(a_i)=0\Rightarrow k_i\cdot 1=0$

故 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关

而 $f=k_1f_1+\cdots+k_nf_n$ 满足 $f(a_i)=b_i\Leftrightarrow k_1f_1(a_i)+\cdots+k_nf_n(a_i)=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

$\Leftrightarrow\quad k_i\cdot 1=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

故 $\exists!\ f\in\mathbb{F}[x]^{(n)}$ s.t. $f(a_i)=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

4、(Artin) 设 G 为群 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 为 $G\to\mathbb{F}^*$ 同态，即 $\forall g_1,g_2\in G$, $\chi(g_1g_2)=\chi(g_1)\chi(g_2)$

证明：若 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 互不相同，则 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 线性无关，即

若 $\forall g\in G$, $k_1\chi_1(g)+\cdots+k_n\chi_n(g)=0$ 则 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

证明：对 n 归纳, $n=1$ 时显然，若 $n=k$ 时成立，则 $n=k+1$ 时

假设 $\exists(k_1,\cdots,k_n)\neq 0$ s.t. $k_1\chi_1(g)+\cdots+k_n\chi_n(g)=0$

日期: /

不妨设 $k_2 \neq 0$. 由 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 互不相同知 $\exists z\in G$ s.t. $\chi_1(z)\neq\chi_2(z)$

$$\begin{cases}\chi_1(z)(k_1\chi_1(g)+\cdots+k_n\chi_n(g))=0\\ k_1\chi_1(zg)+\cdots+k_n\chi_n(zg)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1\chi_1(z)\chi_1(g)+\cdots+k_n\chi_1(z)\chi_n(g)=0 & ①\\ k_1\chi_1(z)\chi_1(g)+\cdots+k_n\chi_n(z)\chi_n(g)=0 & ②\end{cases}$$

①-② $\Rightarrow \sum_{i=2}^{n} k_i(\chi_1(z)-\chi_i(z))\chi_i(g)=0$ 为 $\chi_2,\cdots,\chi_n$ 的线性组合

且 $k_2\neq 0$, $\chi_1(z)-\chi_2(z)\neq 0 \Rightarrow$ 该线性组合非0

与归纳假设 $\chi_2,\cdots,\chi_n$ 线性无关矛盾.

故若 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 互不相同,则 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 线性无关

日期:　　　/