1. 上周作业

- D UFD. $a,b\in D^*$ $\gcd(a,b)=1$ 证明 $\gcd(a+b,ab)=1$

pf 法1. 反证 若 $\gcd(a+b,ab)\neq 1$ 则存在素元 p. s.t. $p\mid \gcd(a+b,ab)$

$\Rightarrow p\mid ab.$ $\Rightarrow$ 不妨设 $p\mid a$,

又 $p\mid a+b$ $\Rightarrow p\mid b$ $\Rightarrow$ $p\mid \gcd(a,b)$ 矛盾

法2. $\gcd(a+b,ab)=((a(a+b),a+b),ab)$

$=((a^2+ab,a+b),ab)$

$=(a+b,(a^2+ab,ab))$

$=(a+b,(a^2,ab))$

$=(a+b,a(a,b))$

$=(a+b,a)=(b,a)=1$

练习: 1) $(a,b)=1$ $\Rightarrow$ $(a,bc)=(a,c)$

pf. $(a,bc)=((a,ac),bc)=(a,(ac,bc))=(a,c(a,b))=(a,c)$

- F 为域. $A:F^n\to F^n$ 线性映射. $f(A)=0$ 证明: t 在 $f(t)$ 中的重数小于等于2
则 $F^n=\ker A\oplus \operatorname{Im} A$

pf. • $\operatorname{mult}_t f(t)=0$ 则 可设 $f(t)=a_nt^n+\cdots+a_0$ $a_0\neq 0$

$\Rightarrow$ $a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$

$\Rightarrow$ $-a_0^{-1}(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I)\cdot A=I$

$\Rightarrow A$ 可逆 $\Rightarrow$ $F^n=\operatorname{Im}A=\ker A\oplus \operatorname{Im}A$ $(\ker A=0)$

• $\operatorname{Mult}_t f(t)=1$ 则 可设 $f(t)=t\,g(t)$ $(t,g(t))=1$

由核核定理 $F^n=\ker A\oplus \ker g(A)$

claim: $\ker g(A)=\operatorname{Im}A$

 $\cancel{法}$: 由 $g(A)\cdot A=0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Im}A\subset \ker g(A)$

另一方面: 法1: 注意到 $F^n=\ker A\oplus \ker g(A)$ $\cancel{\cong}$ $F^n/\ker A\cong \operatorname{Im}A$ $\Rightarrow$ $\dim\ker g(A)=\dim \operatorname{Im}A\Rightarrow$ claim.

法2. 设 $g(t)=a_nt^n+\cdots+a_0$ $a_0\neq 0$ 设 $x\in \ker g(A)$

则 $(a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I)\cdot x=0$

$\Rightarrow -a_0^{-1}A(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I)\cdot x = x$

$\Rightarrow x\in \mathrm{Im}A \Rightarrow \mathrm{Ker}\,g(A)\subset \mathrm{Im}A$ $\square$

2. 复数与几何

对复数 $a+ib$，我们可视作二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上的向量 (a,b).

2.1 向量 z_1,z_2 垂直 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$

向量 z_1,z_2 平行 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$

Pf. 注意到 $z_1\bar{z}_2=|z_1|e^{i\arg z_1}|z_2|e^{-i\arg z_2}=|z_1||z_2|e^{i(\arg z_1-\arg z_2)}$

$z_1\perp z_2 \Leftrightarrow \arg z_1-\arg z_2=\pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2=0$

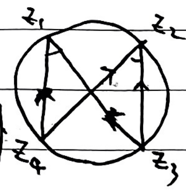
$z_1\parallel z_2 \Leftrightarrow \arg z_1-\arg z_2=0,\pm\pi \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, z_1\bar{z}_2=0$

2.2 证明：平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0$

Pf. $\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)$

z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆等价于

向量 z_1-z_3 与 z_1-z_4 的夹角 等于向量 z_2-z_3 与 z_2-z_4 夹角或互补



而 $\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}$ 为 z_1-z_3 与 z_1-z_4 夹角

2.3 设 $z_1,\cdots,z_n$ 为单位圆周上的 n 个点，则

$z_1,\cdots,z_n$ 为正 n 边形的 n 个顶点 $\Rightarrow$ $z_1+\cdots+z_n=0$

Pf. $e^{\frac{2\pi i}{n}}(z_1+\cdots+z_n)=z_1+\cdots+z_n \Rightarrow z_1+\cdots+z_n=0$

2.4 设 L 为由方程 $\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0$ 所确定的点的轨迹，其中 α,d 为实数，β为复数

证明 (i) $\alpha=0,\ \beta\neq 0$ 时 L 为直线

(ii) $\alpha\neq 0$ $|\beta|^2-\alpha d>0$ 时 L 为圆周

Pf. (i) $\alpha=0$ 时 令 $\lambda=\frac{d}{2|\beta|^2}$ 则 原方程为 $\bar{\beta}(z+\lambda\beta)+\beta\overline{(z+\lambda\beta)}=0$.

$\Rightarrow \operatorname{Re}\bar{\beta}(z+\lambda\beta)=0 \quad \Rightarrow \quad z+\lambda\beta \perp \beta \quad \Rightarrow$ z 为过 $-\lambda\beta$ 与 β 垂直的直线

(ii) 原式 $\Leftrightarrow a^2 z\bar{z} + a\bar{\beta}z + a\beta\bar{z} + ad = 0$

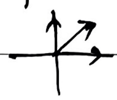
$\Leftrightarrow (az+\beta)(a\bar{z}+\bar{\beta}) = |\beta|^2 - ad > 0$

$\Leftrightarrow |az+\beta|^2 = |\beta|^2 - ad > 0$

3. 线性相关、线性无关

3.1 Example：若干两两线性无关的向量，其全体不一定线性无关。

$(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$



3.2 · $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_{k+p}$ 线性相关

· $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_{k+p}$ 线性无关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关

3.3 Wronskian 行列式

Def：设 $f_1,\cdots,f_n \in C^{(n-1)}(a,b)$ 令

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

称作 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的 Wronskian 行

prop：$f_1,\cdots,f_n$ 线性相关 $\Rightarrow W(x) \equiv 0$

Pf：

"反证：若 $\exists x_0 \in (a,b)$ s.t. $W(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 只有解 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

但是，由 $f_1,\cdots,f_n$ 线性相关 $\Rightarrow$ 上述方程组有非0解。矛盾

Example（上述命题之反过来不对）考虑 x^2, $x|x|$ 这两个函数。

Wronskian 行列式为 $\begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0$ 但它们不是线性相关。