日期:　　　/

1、$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$

$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$

$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

几何意义：平行四边形对角线长度平方和为四条边长度平方和

2、$x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}=(x-1)^4+C_5^1(x-1)^3-C_5^2(x-1)^2+C_5^3(x-1)+C_5^4$

故由Eisenstein判别法知在$\mathbb{Q}$不可约，不可约分解为$x^4+x^3+x^2+x+1$

$x^4+x^3+x^2+x+1$在$\mathbb{C}$有根$e^{\frac{2\pi i}{5}k}$ $(k=1,2,3,4)$

故在$\mathbb{R}$不可约分解为$(x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1)$

在$\mathbb{C}$不可约分解为$\prod_{k=1}^{4}(x-e^{\frac{2k\pi i}{5}})$

3、x^m-1在$\mathbb{C}$根为$e^{\frac{2k\pi}{m}i}$ $(k=1,2,\cdots,m)$

x^n-1在$\mathbb{C}$根为$e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

故公共根为$e^{\frac{2k\pi i}{\gcd(m,n)}}$ $(k=1,2,\cdots,\gcd(m,n))$

在$\mathbb{C}$上$\gcd(x^m-1,x^n-1)=x^{\gcd(m,n)}-1\Rightarrow\mathbb{Q}$上亦然。

4、是，$z_1+z_2-2\sqrt{5}=0$

否　$k_1z_1+k_2z_2+k_3=0\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1-k_2=0\\k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$

5、略

6、"⇐"：若 $k_1f_1+\cdots+k_nf_n=0$

则 $\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)\end{pmatrix}X=0$ 的根

$\Rightarrow \begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0$ 故 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关

"⇒"：归纳，$n=1$ 时显然、

若 $n=k$ 时成立，$n=k+1$ 时

由归纳假设，$\exists\, a_1,\cdots,a_{n-1}$

s.t. $\det(f_i(a_j))_{k\times k}\neq 0$

$$g(x)=\det\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_{n-1}) & f_1(x)\\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_{n-1}) & f_2(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_{n-1}) & f_n(x)\end{pmatrix}$$

按最后一列展开知为 $f_1,\cdots,f_n$ 非0线性组合 $\Rightarrow g\neq 0$

即 $\exists\, a_{k+1}$ s.t. $g(a_{k+1})\neq 0 \Rightarrow (f_i(a_j))_{n\times n}\neq 0$

日期:　　/

六、若干不随基域扩张改变的性质

(1) 若 $f,g\in\mathbb{F}[x]$，$\mathbb{K}$为$\mathbb{F}$扩域，则 $\gcd_{\mathbb{F}}(f,g)=\gcd_{\mathbb{K}}(f,g)$.

推论：f,g 在$\mathbb{F}$互素 $\Leftrightarrow$ 在 $\mathbb{K}$ 互素

在$\mathbb{F}$上 $f\mid g$ (即 $\exists h\in\mathbb{F}[x]$ s.t. $g=fh$)，则在$\mathbb{K}$上 $f\mid g$

$\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$，$p\in\mathbb{F}[x]$ 为 f 的 k 重因式 $(k\geq1)$

$\Leftrightarrow$ 作为$\mathbb{K}$上多项式 p 为 f 的 k 重因式

证明：由辗转相除过程可直接得到

也可由在$\mathbb{K}$上 $d=\gcd_{\mathbb{F}}(f,g)$ 为 f 与 g 公因式且

$\exists u,v\in\mathbb{F}[x]\subset\mathbb{K}[x]$ s.t. $d=uf+vg$.

推论证明：f 与 g 在$\mathbb{F}$互素 $\Leftrightarrow \gcd_{\mathbb{F}}(f,g)=1 \Leftrightarrow \gcd_{\mathbb{K}}(f,g)=1$

在$\mathbb{F}$上 $f\mid g \Leftrightarrow \gcd_{\mathbb{F}}(f,g)=f \Leftrightarrow \gcd_{\mathbb{K}}(f,g)=f$

在$\mathbb{F}$上 p 为 f 的 k 重因式 $\Leftrightarrow p^{k-1}\mid\gcd_{\mathbb{F}}(f,f')$

$\Leftrightarrow p^{k-1}\mid\gcd_{\mathbb{F}}(f,f')$

$\Leftrightarrow p^{k-1}\mid\gcd_{\mathbb{K}}(f,f')$

$\Leftrightarrow$ 在$\mathbb{K}$上 p 为 f 的 k 重因式

日期: /

(2) $A\in M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{K}$为$\mathbb{F}$扩域, 则

① 在$\mathbb{K}$上 $\det A$ 与$\mathbb{F}$上 $\det A$ 相同

② $\exists P,Q\in GL_n(\mathbb{F}), PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists P,Q\in GL_n(\mathbb{K}), PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

③ $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{F}^n$

则 $\dim\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle_{\mathbb{F}}=\dim\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle_{\mathbb{K}}$

由行列式为元素经相加相乘得到知①正确

rank(A)为A的非0子式最大阶数, 故②正确

③同②

Remark: 线性空间维数与基域选取相关

如 $\mathbb{C}/\mathbb{C}$ 为1维, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 为2维,

2、$V_1,V_2,\cdots,V_n$ 两两交为$\{0\}$ ⇏ $V_1+V_2+\cdots+V_n=\bigoplus\limits_{i=1}^n V_i$

不能, 如 $V_i=\langle(1,i)\rangle\subset\mathbb{R}^2$

3、无穷维线性空间几个特殊之处

$\sigma,\varphi\in Hom(V)$, $\sigma\varphi=id$ ⇏ $\varphi\sigma=id$. 如$V=C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi: f\mapsto\int_0^x f dx$; $\sigma: f\mapsto f'$

$\exists\sigma,\varphi\in Hom(V)$ s.t. $\sigma\varphi-\varphi\sigma=id$. 如$V=C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi: f\mapsto xf$; $\sigma: f\mapsto f'$

日期:　　/

4、Def：$V=U\oplus W$，则称W为U(在V中)的补空间

可能有$\dim V=\dim U=\infty$　$\dim W<\infty$情况

如例1：$V=C^{\infty}(\mathbb{R})$　$U=\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R})\mid f(0)=0\}$　$W=\{f\mid f(x)\equiv a, a\in\mathbb{R}\}$

V为复值数列全体，$U=\{\{a_n\}\mid a_1=a_2=0\}$　$W=\{\{a_n\}\mid a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\}$

补空间不唯一，但同构于V/U

证明：设W为U的补空间，自然映射$\varphi: W\to V/U$

$\alpha\mapsto\alpha+U$

$\forall\alpha\in\ker\varphi\Rightarrow\alpha+U=U\Rightarrow\alpha\in U$

故$\alpha\in U\cap W\Rightarrow\alpha=0$；

$\forall\alpha+U\in V/U$，由$V=U\oplus W$知$\exists\alpha_1\in U,\alpha_2\in W$

s.t. $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\Rightarrow\alpha+U=\alpha_2+U=\varphi(\alpha_2)$

故φ为同构映射，V/U与W同构.

5、设$V=U\oplus W$，则$\forall\alpha\in V$，$\exists\alpha_1\in U,\alpha_2\in W$, s.t. $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

定义$\varphi: V\to V$，　称φ为V到U的投影算子

$\alpha\mapsto\alpha_1$

(1) φ为线性映射

(2) $\varphi^2=\varphi$

(3) $\sigma\in\mathrm{Hom}(V)$满足$\sigma^2=\sigma$，则σ为投影算子

日期:　　/

(1) 略

(2) $\forall \alpha \in V$, $\varphi(\alpha) \in U$, 故 $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) + 0 \Rightarrow \varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha)$

从而 $\varphi^2 = \varphi$

(3) $\sigma^2 = \sigma$, 故 $t^2 - t = t(t-1)$ 为 σ 的零化多项式, 且 $\gcd(t, t-1) = 1$

由核核分解知 $V = \ker(\sigma) \oplus \ker(\sigma - id)$

取 $U = \ker(\sigma - id)$

则 $\forall \alpha \in V$, $\alpha = \sigma(\alpha) + (id - \sigma)(\alpha)$ 由 $\sigma(\sigma - id) = 0$ 知

$\sigma(\alpha) \in U$ 且 $(id - \sigma)\alpha \in \ker(\sigma)$

故 σ 为 V 到 U 的投影算子