1. 上周作业

1.1 $(x^m-1, x^n-1) = x^{\gcd(m,n)}-1$

Pf: $(x^m-1, x^n-1) = (x^m-x^n, x^n-1) = (x^n(x^{m-n}-1), x^n-1)$

$= (x^{m-n}-1, x^n-1) = \cdots = x^{\gcd(n,m)}-1$ □

此事实上是在对 m, n 做辗转相除法

1.2 $f_1, \cdots, f_n \in F[x]$，证明 $f_1, \cdots, f_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \exists a_1, \cdots, a_n \in F$ s.t $\det(f_i(a_j))_{n\times n} \neq 0$

Pf: "$\Leftarrow$"："$\Leftarrow$"的逆否命题为 $f_1, \cdots, f_n$ 线性相关 $\Rightarrow \forall a_1, \cdots, a_n \in F$，有 $\det(f_i(a_j))_{n\times n} = 0$

容易，因为 $f_1, \cdots, f_n$ 线性相关 $\Rightarrow$ $(f_i(a_j))_{n\times n}$ 的行向量线性相关

"$\Rightarrow$" 归纳，对 n。

$n=1$ 平凡

假设 $n-1$ 时，结论成立，n 时，

考虑 $f_1, \cdots, f_{n-1}$ 线性无关 $\xRightarrow{\text{假设}}$ $\exists a_1, \cdots, a_{n-1}$ s.t $\det(f_i(a_j))_{n-1\times n-1} \neq 0$

考虑 $g(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_{n-1}) & f_1(x) \\ \vdots & & & \vdots & \\ f_{n-1}(a_1) & f_{n-1}(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_{n-1}) & f_{n-1}(x) \\ f_n(a_1) & & & & f_n(x) \end{pmatrix}$

按最后一列展开 $\Rightarrow$ $g(x)$ 为 $f_1, \cdots f_n(x)$ 的非0线性组合

（这是因为 $f_n(x)$ 前的系数为 $\det(f_i(a_j))_{n-1\times n-1} \neq 0$，$\xRightarrow{f_1 \cdots f_n \text{线性无关}}$ $g(x) \neq 0$ ）

$\Rightarrow \exists a_n \in F$ s.t $g(a_n) \neq 0$

$\Rightarrow \det(f_i(a_j))_{n\times n} \neq 0$

1.3 $x^4+x^3+x^2+1$ 的分解 in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{C}[x]$

Eisenstein 判别法 不可约 in $\mathbb{Q}[x]$

in $\mathbb{C}[x]$ $x^4+x^3+x^2+1 = \frac{x^5-1}{x-1} = (x-\zeta_5)(x-\zeta_5^2)(x-\zeta_5^3)(x-\zeta_5^4)$ ζ_5 为5次单位根

in $\mathbb{R}[x]$. 由 $\zeta_5 = \overline{\zeta_5^4}$ $\zeta_5^2 = \overline{\zeta_5^3}$ $\Rightarrow$ $x^4+x^3+x^2+1 = \left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)$

No.
Date

2. 投影算子

设 V 是 F-线性空间. $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ $\forall i=1,\ldots,k$, 定义

$P_i: V\to V \quad x\to x_i$

其中 $x=\sum_{i=1}^{k}x_i \quad x_i\in V_i$

(i) P_i 是线性映射. 称作 V 到 V_i 关于上述直和的投影

(ii) (幂等性) $P_i^2=P_i$

(正交性) $P_i\circ P_j=0 \quad \forall i\neq j$

(完全性) $P_1+\cdots+P_k=id$

Pf: (i) 只需注意到 分解 $x=\sum_{i=1}^{k}x_i$ 是唯一的

(ii) 平凡, 直接验证即可

3. 线性相关性与线性映射

设 $A: V\to W$ 为线性空间间的线性映射, 则

i) A 将线性相关集映为线性相关集

ii) 设 $K=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}$ 为 $\ker A$ 的一组基, $S=\{v_1,\ldots,v_t\}$ 为 V 中一组向量.

则 a) $K\cup S$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $A(S)\triangleq\{A(v_1),\ldots,A(v_t)\}$ 线性无关

b) S 为 V 的基 $\Leftrightarrow$ $A(S)$ 为 $\mathrm{Im}A$ 的基

pf i) 平凡

ii) a) "$\Rightarrow$" 若 $A(S)$ 线性相关, 则有 $x_1,\ldots,x_t$ 不全为 0 s.t

$0=x_1A(v_1)+\cdots+x_tA(v_t)=A(x_1v_1+\cdots+x_tv_t)$

则 $x_1v_1+\cdots+x_tv_t\in\ker A$,

由 K 为 $\ker A$ 的基 $\Rightarrow$ $K\cup S$ 线性相关

"$\Leftarrow$" 设 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s+y_1v_1+\cdots+y_tv_t=0$

$\Rightarrow x_1A(\alpha_1)+\cdots+x_sA(\alpha_s)=0$

$A(S)$ 线性无关

$x_1,\ldots,x_s=0 \Rightarrow y_1v_1+\cdots+y_tv_t=0$

K 为基

$\Rightarrow y_1,\ldots,y_t=0 \Rightarrow K\cup S$ 线性无关

ii) b) 考虑 ……即可，注意到 $\dim V = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A$

4. · 线性映射 $A: V \to V$ 单射 $\Leftrightarrow \ker A = 0$

· 满射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V$

· 若 $\dim V = \dim V$ 则 A 可逆 $\Leftrightarrow \ker A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V$

· 可逆线性映射的逆也是线性映射

5. $A \in F^{n\times n}$, $k \in \mathbb{N}$ 证明 $\operatorname{rank} A^k - \operatorname{rank} A^{k+1} \geq \operatorname{rank} A^{k+1} - \operatorname{rank} A^{k+2}$

Pf 1. (Rmk) 设 $A: V \to V = F^n$ $X \to AX$ 为线性映射，则

$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A$

（通常对线性映射 A，我们定义 $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A$ ）

2. 注意到有 $A: \operatorname{Im} A^k \to \operatorname{Im} A^{k+1}$ 满射

$\Rightarrow \operatorname{rank} A^{k+1} = \operatorname{rank} A^k - \ker A \cap \operatorname{Im} A^k$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A^k - \operatorname{rank} A^{k+1} = \dim \ker A \cap \operatorname{Im} A^k$

注意到有 $V \supset \operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im} A^2 \supset \cdots \supset \operatorname{Im} A^k \supset \operatorname{Im} A^{k+1} \supset \operatorname{Im} A^{k+2} \supset \cdots$

$\Rightarrow LHS = \dim \ker A \cap \operatorname{Im} A^k \geq \dim \ker A \cap \operatorname{Im} A^{k+1} = RHS$

6. 设 $A: V \to V$ 线性映射，V 有限维线性空间

· $V \supset \operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im} A^2 \supset \cdots \supset \cdots$

$\Rightarrow$ 存在足够大的 N s.t $\operatorname{Im} A^N = \operatorname{Im} A^{N+1} = \cdots \triangleq \operatorname{Im} A^\infty$

· $0 \subset \ker A \subset \ker A \subset \cdots$

$\Rightarrow$ 存在足够大的 N s.t $\ker A^N = \ker A^{N+1} = \ker A^{N+2} \cdots \triangleq \ker A^\infty$

~~· 存在足够大的 N s.t A^{N+1} = A^N V 上 ……~~

· $V = \operatorname{Im} A^\infty \oplus \ker A^\infty$

Pf: 只需证 $\ker A^\infty \cap \operatorname{Im} A^\infty = 0$

即 $x \in \operatorname{Im} A^\infty \cap \ker A^\infty \Rightarrow x = A^N(y)$, $A^N(x) = A^{2N}(y) = 0 \Rightarrow y \in \ker A^{2N} = \ker A^N \Rightarrow x = 0$

· $A|_{\operatorname{Im} A^\infty}$ 为同构 $A|_{\ker A^\infty}$ 幂 0