1. 上周作业

1.1 W_1, W_2 为 V 子空间，存在 $v_1, v_2 \in V$ s.t. $v_1+W_1 = v_2+W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$

Pf. $v_1+W_1 = v_2+W_2 \Rightarrow v_1-v_2+W_1 = W_2 \Rightarrow v_1-v_2 \in W_2$

$\Rightarrow W_1 = (v_2-v_1)+W_2 = W_2$ $\quad$ ($a \in V \Rightarrow a+V = V$)

1.2 i) 线性空间不能写成两个真子空间的并

ii) $char(F)=0$, F-线性空间不能写成有限个真子空间的并

i) 设 $V_1 \subsetneq V$ $V_2 \subsetneq V$ 令 $v_1 \in V_1 \backslash V_2$ $v_2 \in V_2 \backslash V_1$

则 $v_1+v_2 \notin V_1 \cup V_2$

ii) 设 $V_1, \cdots, V_n$ 为 V 的真子空间

对 n 归纳. n=2 时 成立. 假设 n-1 时结论成立.

n 时. 由归纳假设 $V \neq V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$

$\Rightarrow \exists\ v \notin V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$

若 $v \notin V_n$ 则结论成立. 不妨设 $v \in V_n$, 令 $u \notin V_n$

考虑 $v+u, 2v+u, 3v+u, \cdots, nv+u$

显然 它们都 $\notin V_n$

Claim: 它们中存在一个 $\notin V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$ (进而 $\notin V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1} \cup V_n$)

否则, 由抽屉原理. $\exists\ i \neq j$ s.t. $iv+u, jv+u \in V_k$.

($char F=0 \Rightarrow i-j \neq 0$)

$\Rightarrow (i-j)v \in V_k$ 矛盾 $\square$

$\boxed{\text{另一种方法}}$: 设 $e_1, \cdots, e_m$ 为 V 的基. 考虑集合

$S = \{ ie_1 + i^2e_2 + \cdots + i^m e_m \}_{i \in \mathbb{N}} \subset V$

由 Vandermonde 行列式, 知 它们中任意 n 个都线性无关

$\Rightarrow$ 故, S 中只有有限个在 V_i 中

$\Rightarrow$ S 中只有有限个在 $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ 中

$char F=0 \Rightarrow$ S 为无限集 $\Rightarrow$ S 中存在 $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ 之外的元素. $\square$

No

Date

2、利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式

基本方法与步骤：

Step 1：矩阵 → 线性映射

$$A \to \mathcal{A}: F^n \to F^n \qquad X \to AX$$

Step 2：$\begin{cases} \dim\ker\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = n \\ \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{rank} A \end{cases}$

Step 3：利用核空间的包含关系与同构定理，构造线性映射

Step 4：由单射保持原像空间的维数 证明不等式

Example：2.1 $A\in F^{m\times s}$ $B\in F^{s\times n}$ 证明

$$\operatorname{rank} A\cdot B \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - s$$

pf：命题 $\Leftrightarrow n-\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \geq s-\ker\mathcal{A}+n-\ker\mathcal{B}-s$

$\Leftrightarrow \dim\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \leq \dim\ker\mathcal{A}+\dim\ker\mathcal{B}$

注意到 $\ker\mathcal{B}\subset\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$，且

$\mathcal{A}|_{\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}: \ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}\to\ker\mathcal{A}$ 良定义

$X \to B\cdot X$

$\Rightarrow \dim\ker\mathcal{A} \geq \dim\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} - \dim\ker\mathcal{A}|_{\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$

$= \dim\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} - \dim\ker\mathcal{B}$

Example 2.2 $A,B\in M_n(F)$ $AB=BA$ 证明

$$\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B$$

pf：$\Leftrightarrow n-\dim\ker\mathcal{A}+\mathcal{B}+n-\dim\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \leq n-\dim\ker\mathcal{A}+n-\dim\ker\mathcal{B}$

$\Leftrightarrow \dim\ker\mathcal{A}+\dim\ker\mathcal{B} \leq \dim\ker\mathcal{A}+\mathcal{B}+\dim\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$

注意到 $\begin{cases} \ker\mathcal{B}\subset\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \\ \qquad\qquad\quad \Vert \\ \ker\mathcal{A}\subset\ker\mathcal{B}\cdot\mathcal{A} \end{cases} \Rightarrow \ker\mathcal{A}+\ker\mathcal{B}\subset\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$

$\Rightarrow \dim\ker\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \geq \dim(\ker\mathcal{A}+\ker\mathcal{B}) = \dim\ker\mathcal{A}+\dim\ker\mathcal{B}-\dim\ker\mathcal{A}\cap\ker\mathcal{B}$

3.而证 $\dim\ker A\cap\ker\mathcal{B} \leq \dim\ker(A+\mathcal{B})$ 显然，由 $\ker\mathcal{A}\cap\ker\mathcal{B}\subset\ker\mathcal{A}+\mathcal{B}$

(~~Frobenius 秩不等式~~)

练习: $\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC - \operatorname{rank} B \le \operatorname{rank} ABC \quad \forall A \in F^{m\times n}\ B \in F^{n\times p}\ C \in F^{p\times q}$

pf: $\Leftrightarrow p - \ker AB + q - \dim\ker BC - (p - \dim\ker B) \le q - \dim\ker ABC$

$\Leftrightarrow \dim\ker ABC + \dim\ker B \le \dim\ker AB + \dim\ker BC$

注意到 $\ker BC \subset \ker ABC \qquad \ker B \subset \ker AB$

考虑 $\ker ABC \to \ker A \qquad \ker AB \to \ker A$

$x \to BCx \qquad x \to Bx$

$\Rightarrow \dim\ker ABC - \dim\ker BC = \dim BC(\ker ABC)$

$\dim\ker AB - \dim\ker B = \dim B(\ker AB)$

由注意到 $BC(\ker ABC) \subset B(\ker AB)$ □

练习: 证明 ~~$\operatorname{rank}(I_m - AB)$~~ $= m - \operatorname{rank}(I_m - AB) = n - \operatorname{rank}(I_n - BA) \quad A \in F^{m\times n}\ B \in F^{n\times m}$

pf: $\Leftrightarrow \dim\ker(I_m - AB) = \dim\ker(I_n - BA)$

注意到 $\ker(I_m - AB) \to \ker(I_n - BA)$

$x \to Bx$

well-define and isomorphism □

3. 对偶空间

3.1 $V \to V^* \to V^{**}$

$x \to x^* \to x^{**}$

1. $x^{**} = x \quad \forall x \in V$ (典范同构意义下)
2. $f: V \to W$ 诱导 $f^*: W^* \to V^* \quad w^* \to w^* \circ f$
3. 一维子空间 $\leftrightarrow$ 余一维子空间

3.2 用对偶观点证明：线性空间不能写成有限个子空间的并

pf: Step 1. 反证设 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ 不妨设 $\dim V_i = n-1$

Step 2: $V_i = \ker f_i \quad f_i \in V^*$

Step 3. 取 V 的基 $e_1, \ldots, e_m$ 这样不妨设 $V = F^m$

No.

Date

则 $f_i \longleftrightarrow$ 线性多项式 $f_i^1 X_1 + \cdots + f_i^m X_m \in F[X_1, \cdots, X_m]$　$f_{i,j}$　$f_i^j \in F$

step 4. 令 $g = f_1 \cdots f_n \in F[X_1, \cdots, X_n]$

发现 $g(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0 \quad \forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in F$

$\mathrm{char} F = 0 \Rightarrow g(X_1, \cdots, X_n) = 0$

step 5. $F[X_1, \cdots, X_n]$ 是整环 $\Rightarrow \exists i$ s.t. $f_i = 0$ 矛盾