1. 上周作业

设 $a_1,\dots,a_n \in F$ 互不相同，F为域，定义

$$T_{a_i}: F[x]^{(n)} \to F \qquad f(x) \mapsto f(a_i)$$

(i) 证明 T_{a_i} 为 $(F[x]^{(n)})^*$ 的一组基

(ii) 求 $F[x]^{(n)}$ 一组基使得它的对偶基为 T_{a_i} $(i=1,\dots,n)$

(iii) 求求基 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ 到上述基的转换矩阵

解 (i) 只需证明 $\{T_{a_i}\}_{i=1}^n$ 线性无关

设 $u_1 T_{a_1} + \cdots + u_n T_{a_n} = 0 \quad u_i \in F$

令 $f_i = \prod_{1\le j \ne i \le n} (x-a_j) \in F[x]^{(n)}$

$\Rightarrow (u_1 T_{a_1} + \cdots + u_n T_{a_n})(f_i) = u_1 f_i(a_1) + \cdots + u_n f_i(a_n) = u_i \prod_{j\ne i}(a_i - a_j) = 0$

a_i 两两不同

$\Rightarrow u_i = 0$

(ii) 令 $g_i(x) = \dfrac{(x-a_1)\cdots\widehat{(x-a_i)}\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots\widehat{(a_i-a_i)}\cdots(a_i-a_n)}$

容易验证 $T_{a_i}(g_i) = 1 \qquad T_{a_j}(g_i) = 0 \quad \forall j \ne i$

$\Rightarrow g_i^* = T_{a_i}$

(iii) 将 g_i 展开，即得转换矩阵

2. 对称双线性型与二次型

回顾：

1. $\mathrm{char} F \ne 2$，f 是 V 上对称双线性型，则存在 V 的一组基，使得 f 在基下的矩阵为对角阵
2. $\mathrm{char} F \ne 2$，q 为 V 上二次型，则存在 V 的一组基，使得 q 在基下的矩阵为对角阵
3. $\mathrm{char} F \ne 2$，$A \in SM_n(F)$，则 A 合同于对角阵

Rmk：取 V 的基 $e_1,\dots,e_n$，$X = \overset{F^n}{(x_1,\dots,x_n)}\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix} \quad Y = \overset{F^n}{(y_1,\dots,y_n)}\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix} \in V$

$f(X,Y) = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix} f (e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} f(e_i,e_j)\end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$

$q(X) = \cdots = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} f(e_i,e_j)\end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$

No.
Date

计算标准型

1) 配方法

$q(x_1,\dots,x_n)=\sum a_{ij}x_ix_j$ $\qquad a_{ij}=a_{ji}$

只看 x_1 $= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n + R(x_2,\dots,x_n)$

$a_{11}\neq 0$

$= a_{11}\left(x_1^2 + x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right) + R(x_2,\dots,x_n)$

$= a_{11}\left(x_1+\frac{1}{2}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right)^2 + \tilde R(x_2,\dots,x_n)$

其中 $\tilde R(x_2,\dots,x_n) = R(x_2,\dots,x_n) - \frac{a_{11}}{4}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$ 仍是二次型！

对 $\tilde R$ 继续类似操作，最终得到标准型

$a_{11}=0$

$\exists a_{1k}\neq 0$

$= a_{1k}x_1x_k + a_{k1}x_kx_1 + R_1(x_1,\dots,x_n)$

$= \frac{a_{1k}}{2}\left[(x_1+x_k)^2-(x_1-x_k)^2\right] + R_1(x_1,\dots,x_n)$

$= \frac{a_{1k}}{2}y_1^2 - \frac{a_{1k}}{2}y_k^2 + R_2(y_1,x_2,\dots,y_k,x_{k+1},\dots,x_n)$ $\quad$ (令 $y_1=x_1+x_k$, $y_k=x_1-x_k$)

注意到 $R_2(y_1,x_2,\dots,y_k,\dots,x_n)$ 中不含有 y_1^2 项，

此时化为已解决情形

$\forall a_{1k}=0$ $\quad q(x_1,\dots,x_n)$ 中不含有 x_1，$q(x_1,\dots,x_n)=\tilde q(x_2,\dots,x_n)$

例 $q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

$=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)x_3+x_3(y_1+y_2)$ $\qquad \begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=x_3\end{cases}$

$=y_1^2-y_2^2+2y_1x_3$

$=\cancel{y_1^2-(y_2-x_3)^2}$

$=(y_1+x_3)^2-x_3^2-y_2^2$

$=z_1^2-z_2^2-z_3^2$ $\qquad \begin{cases}z_1=y_1+x_3\\ z_2=y_2\\ z_3=x_3\end{cases}$

2) 打洞

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&1&-2\\-3&-2&1\end{pmatrix}$

$-2(1)+(2)$ ← 将第一行的 -2 倍加到第二行 ← 左乘矩阵 $P_1=\begin{pmatrix}1&&\\-2&1&\\&&1\end{pmatrix}$

$-2(1)+(2)$ ← 再将第一列的 -2 倍加到第二列 i.e. ← 右乘矩阵 P_1^t

No.

Date

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3(1)+(3)]{3(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{4}{3}(2)+(3)]{\frac{4}{3}(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

例 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1(2)+(1)]{1(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}(1)+(2),\ -(1)+(3)]{-\frac{1}{2}(1)+(2),\ -(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

练习: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & I_{n\times n} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$

练习 $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$