日期: /

上周作业

1. $(A|E)=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}4&3&0&1&1&0\\3&2&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$

$P^t=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad P^tAP=\begin{pmatrix}4&&\\&-\frac{1}{4}&\\&&0\end{pmatrix}$

2. $\exists P\in GL_n(\mathbb{F})$ s.t. $P^tAP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\ddots&&\\&&\lambda_r&\\&&&0\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iE_{ii}\ (\lambda_i\neq0)$

故 $A=(P^t)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_iE_{ii}\right)P^{-1}=\sum_{i=1}^{r}(P^t)^{-1}(\lambda_iE_{ii})P^{-1}$

3. (1) $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&&\\&\frac{3}{2}&\\&&0\end{pmatrix}$ 故规范型为 $2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$

Remark: 不可由 $f=(x_1-x_3)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2$

作线性替换 $\begin{cases}y_1=x_1-x_3\\y_2=x_1-x_2\\y_3=x_2-x_3\end{cases}$ 因为此线性替换退化.

但可由上式知 f 半正定，由 x_1-x_3 与 x_1-x_2 线性无关且 $x_1-x_2, x_1-x_3, x_2-x_3$ 线性相关知正惯性指数为2

日期: /

从而有规范型 $y_1^2+y_2^2$

(b) $f=(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2+2x_2x_3$

作非退化线性替换 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \\ y_4=x_3+x_4 \end{cases}$ 则 $f=y_1^2+y_4^2+2y_2y_3$

$\begin{cases} y_1=y_1' \\ y_2=y_2'+y_3' \\ y_3=y_2'-y_3' \\ y_4=y_4' \end{cases}$ 则 $f=y_1'^2+y_4'^2+2y_2'^2-2y_3'^2$

故有规范型 $y_1^2+2y_2^2-2y_3^2+y_4^2$

(c) 记 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 设 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\det A=\det\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}(1\cdots 1)-E\right)=(-1)^n\det\left(1-(1\cdots 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right)=(-1)^n(1-n)$$

$n>1$ 时非退化, $f=y_1^2+\cdots+y_n^2$

$n=1$ 时 $f=0$

4. (1) 略

(2) 取 V 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$, f 在该组基下矩阵为

$$(f(e_i,e_j))_{n\times n}=(g(e_i)h(e_j))_{n\times n}=\begin{pmatrix} g(e_1) \\ g(e_2) \\ \vdots \\ g(e_n) \end{pmatrix}(h(e_1)\ h(e_2)\cdots h(e_n))$$

日期:　　/

故 $g=0$ 或 $h=0$ 时 $r(f)=0$，否则 $r(f)=1$

(3) $q(-v)=g^2(-v)=(-g(v))^2=(g(v))^2=q(v)\quad(\forall v\in V)$

$\forall x,y\in V$，$\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))=g(x)g(y)$ 为双线性型

故 q 为二次型

5、定义 $\varphi: V^*/U_0 \longrightarrow U^*$

$f+U_0 \longmapsto f|_U$

易证 φ 良定，满射

$\forall f+U_0\in\ker\varphi \Rightarrow f|_U=0 \Rightarrow f\in U_0 \Rightarrow \varphi$ 单

故 φ 为同构，$\dim U_0=\dim V^*-\dim U^*=n-d$.

2、$U<V$，$\dim U=k$，若 V 上二次型 f 满足 $f|_U$ 正定，则 f 正惯性指数不小于 k.

取 U 的一组基 $u_1,\cdots,u_k$ s.t. $f(u_i,u_j)=\delta_{ij}$，扩充为 V 的一组基，设 f 在该基下矩阵为 $\begin{pmatrix} I_k & A \\ A^t & B\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} I & \\ -A^t & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & A \\ A^t & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A \\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_k & \\ & B-A^tA\end{pmatrix}$$

故 f 正惯性指数为 $k+B-A^tA$ 正惯性指数 $\geq k$

日期:　　　/

$M_n(\mathbb{R})$ 上二次型 $tr(X^2)$ 正惯性指数为 $\frac{n^2+n}{2}$，负惯性指数 $\frac{n^2-n}{2}$ 几何解释:

$\forall X\in SM_n(\mathbb{R})$　$tr(X^2)=tr(X^tX)\geqslant 0$

且 $tr(X^tX)=0 \Leftrightarrow X=0$

$\forall Y\in SSM_n(\mathbb{R})$　$tr(Y^2)=-tr(Y^tY)\leqslant 0$

且 $tr(Y^tY)=0\Leftrightarrow Y=0$

故 $tr(X^2)$ 在 $SM_n(\mathbb{R})$ 正定，$SSM_n(\mathbb{R})$ 负定

从而正惯性指数 $\geqslant\frac{n^2+n}{2}$，负惯性指数 $\geqslant\frac{n^2-n}{2}$

故签名为 $(\frac{n^2+n}{2},\frac{n^2-n}{2})$

3、若A半正定，则 $AX=0\Leftrightarrow X^tAX=0$

由于 $\exists P\in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^tP$，故 $X^tAX=0\Leftrightarrow (XP)^tXP=0\Leftrightarrow XP=0\Rightarrow AX=0$

4、$A\in SM_n(\mathbb{R})$ 主子式均不小于0，则A半正定

证明：对n归纳，n=1时显然，若n=k时成立，n=k+1时

① $a_{nn}=0$，则 $\forall\, 1\leqslant i\leqslant n-1$　$\det\begin{pmatrix}a_{ii} & a_{in}\\ a_{ni} & a_{nn}\end{pmatrix}\geqslant 0\Rightarrow a_{in}=0$

由归纳假设 $A_{n-1}=(a_{ij})_{n-1\times n-1}$ 半正定，

故 $A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 半正定

② $a_{nn}\neq 0$

日期: /

设 $A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^t & a_{nn}\end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix}A_{n-1}-\frac{1}{a_{nn}}\alpha\alpha^t & \\ & a_{nn}\end{pmatrix}$

$A_{n-1}-\frac{1}{a_{nn}}\alpha\alpha^t$ 任一主子式 $\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_l \\ i_1 & \cdots & i_l\end{pmatrix}$ 设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

为 $\det\begin{pmatrix} a_{i_1i_1}-\frac{1}{a_{nn}}a_{i_1}a_{i_1} & \cdots & a_{i_1i_l}-\frac{1}{a_{nn}}a_{i_1}a_{i_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_li_1}-\frac{1}{a_{nn}}a_{i_l}a_{i_1} & \cdots & a_{i_li_l}-\frac{1}{a_{nn}}a_{i_l}a_{i_l}\end{pmatrix}$

$$=\det\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_l} & a_{i_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & a_{i_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{i_l} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_l} & a_{nn}\end{pmatrix}\geq 0$$

故由归纳假设 $A-\frac{1}{a_{nn}}\alpha\alpha^t$ 半正定 $\Rightarrow$ A半正定

Remark A半正定与顺序主子式非负不等价，如 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$

5、A正定，证明 $0\leq X^t(A+XX^t)^{-1}X<1$ $(X\in\mathbb{R}^n)$

由A正定，XX^t半正定知 $X^t(A+XX^t)^{-1}X\geq 0$

法一：$1-X^t(A+XX^t)^{-1}X>0$

$\Leftrightarrow \det(1-X^t(A+XX^t)^{-1}X)>0$

$\Leftrightarrow \det(E_n-XX^t(A+XX^t)^{-1})>0$

$\Leftrightarrow \det(A+XX^t-XX^t)>0$

$\Leftrightarrow \det A>0$ $\square$

法二：$X^t(A+XX^t)^{-1}X$

$=X^t(E+A^{-1}XX^t)^{-1}A^{-1}X$

$=X^t(E-A^{-1}X\frac{1}{1+X^tA^{-1}X}X^t)A^{-1}X$

$=X^tA^{-1}X-\dfrac{(X^tA^{-1}X)^2}{1+X^tA^{-1}X}$

$=\dfrac{X^tA^{-1}X}{1+X^tA^{-1}X}<1$ $\square$

日期:　　　/

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $X^tAX\geqslant 0$ 且 $\exists\beta\in\mathbb{R}^n$ s.t. $\beta^tA\beta=0$. 若 $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$, $X^tAY\neq 0$ 时 $X^tAY+Y^tAX\neq 0$

证明: $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $v^tA\beta=0$

法一: $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $X^tAX\geqslant 0\Rightarrow\frac{A+A^t}{2}$ 半正定, 记为 $\tilde{A}$

$\beta^tA\beta=0\Rightarrow\beta^t(A+A^t)\beta=0\Rightarrow\beta^t\tilde{A}\beta=0\Leftrightarrow\tilde{A}\beta=0$

$X^tAY+Y^tAX\neq 0\Leftrightarrow X^t\tilde{A}Y\neq 0$

假设 $\exists v\in\mathbb{R}^n$ s.t. $v^tA\beta\neq 0$, 则 $v^t\tilde{A}\beta\neq 0$ 与 $\tilde{A}\beta=0$ 矛盾.

法二: $\forall k\in\mathbb{R}$, $(v+k\beta)^tA(v+k\beta)\geqslant 0$

$\Rightarrow\quad\beta^tA\beta k^2+(\beta^tAv+v^tA\beta)k+v^tAv\geqslant 0$

由 k 任意性知左式为常值函数

故 $\beta^tAv+v^tA\beta=0\Rightarrow v^tA\beta=0$

日期: /