1. 上周作业

1.1 $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1$

$= (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$　　(! 并没有结束, 因为 $x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1$ 线性相关

$= y_1^2+y_2^2+(y_2-y_1)^2$　　$\begin{cases} y_1=x_1-x_2 \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 可逆变换

$= 2y_1^2+2y_2^2-2y_1y_2$

$= 2(y_1-\frac{y_2}{2})^2+\frac{3}{2}y_2^2$

$= 2z_1^2+\frac{3}{2}z_2^2$　　$\begin{cases} z_1=y_1-\frac{y_2}{2} \\ z_2=y_2 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

1.2 $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{1\le j\ne i\le n} x_j\right)^2$　　(已经结束了, 因为括号里的 n 个函数线性无关)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆

1.3 秩为 r 的对称阵可以写为 r 个秩为 1 的对称阵之和 (char ≠ 2)

$A = P^t \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} P = \underbrace{P^t \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} P}_{\text{rank}=1} + P^t \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} P + \cdots + P^t \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} P$

1.4 $f: V\times V\to F$　$f(x,y)=g(x)h(y)$　$g,h\in V^*$, 讨论 rank f

pf: 取 V 的基 $\{e_1,\dots,e_n\}$. f 矩阵表示 $(f(e_i,e_j))_{n\times n} = (g(e_i)h(e_j))_{n\times n}$

$= \begin{pmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_n) \end{pmatrix} (h(e_1),\dots,h(e_n))$

$\Rightarrow$ rank $f = \begin{cases} 1 & \text{if } g,h\ne 0 \\ 0 & \text{if } g=0 \text{ or } h=0 \end{cases}$

1.5 V 是 F 线性空间, U 为 V 的 d 维子空间

$U^\circ := \{f\in V^* \mid \forall u\in V, f(u)=0\}$

证明 $\dim U^\circ = n-d$

pf. 注意到. $U^\circ \cong (V/U)^*$

$f \longmapsto \tilde{f}: [x]\to f(x)$　($\tilde{f}$ well-define)

$f: V\xrightarrow{p} V/U \xrightarrow{\tilde{f}} F \longleftarrow \tilde{f}$

No.
Date

2.

2.1 Thm: $SM_n(\mathbb{R}) \ni A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

2.2 (判别) A 正定 $\Longleftrightarrow$ 任意顺序主子式 >0 $\Longleftrightarrow$ 任意主子式 >0

A 半正定 $\Longleftrightarrow$ 任意主子式 ≥ 0

Pf: "$\Rightarrow$" 设 $F^n = Fe_1 \oplus \cdots \oplus Fe_n$

则 $A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix}$ 是 A 限制在 $F^k = Fe_{i_1} \oplus \cdots \oplus Fe_{i_k}$ 上的矩阵表示

显然，它们仍半正定 $\Rightarrow \det A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix} \geq 0$

Rmk 1. V上二次型 q 半正定 $\overset{\text{not}}{\Longleftrightarrow}$ q 限制在任意的一维空间上半正定

$\Longleftrightarrow$ q 限制在任意的子空间上半正定

Rmk 2. ~~$A \geq 0$ (半正定)~~ A 的特征多项式

~~$\Longleftrightarrow$ A 特~~ $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - S_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n S_n$

S_k 为 A 的所有 k 阶主子式之和

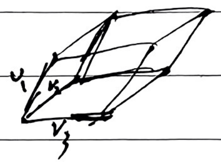
"$\Leftarrow$"

任意主子式 $\geq 0 \Rightarrow S_k \geq 0 \Rightarrow P_A(\lambda)$ 无负实根 $\Rightarrow$ A 无负特征值 $\Rightarrow$ A 半正定

2.3. (Hadamard 不等式)

$$|\det A| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n a_{ki}^2}$$

几何解释：向量 $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, v_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ 张成的平行多面体的体积 $\leq$ 棱长的乘积：$\prod_{i=1}^n \|v_i\|$



3. (正定矩阵的开方)

A 正定 $\Leftrightarrow A = B^2$ B 正定.

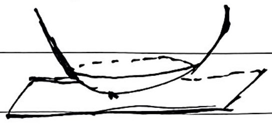
定义 $\sqrt{A} = B$. claim "$\sqrt{\ }$"良定义. 即 B 唯一. ~~已回答~~

4. 设 $f(x_1,\cdots,x_n) \in C^2(\mathbb{R}^n)$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\cdots,0)=0 \quad \forall i \Rightarrow (0,\cdots,0)$ 是 f 可能的极值点.

若再有 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{n\times n}$ 正定 $\Rightarrow (0,\cdots,0)$ 是 f 的极小值点

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{n\times n}$ 负定 $\Rightarrow (0,\cdots,0)$ 是 f 的极大值点.



5 一些例子

5.1 S 为正定 n 阶方阵. 证明: 对 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$X^tSX + Y^tS^{-1}Y \geq 2X^tY$$

并给出等号成立的充要条件.

pf: S 正定 $\Rightarrow (X - S^{-1}Y)^t S (X - S^{-1}Y) \geq 0$

$\Leftrightarrow X^tSX + Y^tS^{-1}Y - Y^tX - X^tY \geq 0$

$\overset{Y^tX = X^tY}{\Leftrightarrow} X^tSX + Y^tS^{-1}Y \geq 2X^tY$

等号成立 iff $X - S^{-1}Y = 0$ i.e. $Y = SX$

5.2 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 证明 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^tA$

pf $\Leftrightarrow \dim \ker A = \dim \ker A^tA$

$\ker A \subset \ker A^tA$ ✓

$\ker A^tA \subset \ker A$: $x \in A^tA \Rightarrow A^tAx=0 \Rightarrow x^tA^tAx = 0 \Rightarrow Ax = 0$

$(Ax)^t Ax = \|Ax\|^2$

No.
Date

5.3 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ ~~$\det A > 0$~~ 则 A 与 A^{-1} 有相同的正,负惯性指数

hint: 考虑标准形

5.4 $S_i \in SM_n(\mathbb{R})$ $S_1^2 + \cdots + S_m^2 = 0 \iff S_1 = \cdots = S_m = 0$

pf: "$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" $0 = X^t(S_1^2 + \cdots + S_m^2)X = X^t S_1^t S_1 X + \cdots + X^t S_m^t S_m X \quad \forall X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$\Rightarrow X^t S_i^t S_i X = 0 \quad i = 1, \cdots, n \quad \forall X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$\Rightarrow S_i X = 0 \quad \forall i, \forall X$

$\Rightarrow S_i = 0 \quad \forall i$

Rank of Rank1

为什么特征多项式 $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - S_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^k S_k \lambda^{n-k} + \cdots + (-1)^n S_n$

中 S_k 为 A 的所有 k 阶主子式之和 ?

Pf: 设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基

则 $\det(\lambda I - A) = \dfrac{(\lambda I - A)e_1 \wedge (\lambda I - A)e_2 \wedge \cdots \wedge (\lambda I - A)e_n}{e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n}$

一些解释

"$\wedge$" 可看作一个形式的符号, 它满足 线性性: $(\alpha e_i + \beta e_j) \wedge e_k = \alpha e_i \wedge e_k + \beta e_j \wedge e_k$

反对称性: $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_s} \wedge e_{i_{s+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_t}$

$= (-1)\, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{s+1}} \wedge e_{i_s} \wedge \cdots \wedge e_{i_t}$

i.e. 相邻的两个交换出来一个负号

$\dfrac{(\lambda I - A)e_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda I - A)e_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$ 指 $(\lambda I - A)e_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda I - A)e_n$ 在 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ 前面的系数

由线性性

展开 $= \lambda^n \dfrac{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$

$+ (-1)^1 \lambda^{n-1} \left(\dfrac{Ae_1}{e_1} + \cdots + \dfrac{Ae_n}{e_n} \right)$

$+ \cdots + (-1)^k \lambda^{n-k} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \dfrac{Ae_{i_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{i_k}}{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}}$

$+ \cdots + (-1)^n \dfrac{Ae_1 \wedge \cdots \wedge Ae_n}{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}$

这个东西显然就是主子式 $A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ i_1, \cdots, i_k \end{pmatrix}$