日期:　　　/

1、上周作业

1、$\begin{pmatrix} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{4} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

故答案为 $(1,1)$

2、(1) $\det S = -1 < 0$ 故 S 不为半正定 $\Rightarrow$ 不存在 $P \in GL_n(\mathbb{R})$

$s.t.\ S = P^t P$

(2) $\operatorname{rank} S = 2 \Rightarrow S$ 在 $\mathbb{C}$ 合同于 E_2，即 $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ $s.t.\ S = P^t P$

3、法一：$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i & \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$

法二：$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i & \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} a_i^2 & a_i b_i \\ a_i b_i & b_i^2 \end{pmatrix}$

故半正定.

由半正定知 $\det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 & \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i & \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{pmatrix} \geq 0$ 即 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$

4、法一：$tE+A$ 的各阶顺序主子式都为 t 的首一多项式，

由于多项式均有有限个根，故 $\exists t_0 \in \mathbb{R}$，$\forall t > t_0$

日期:　　/

$tE+A$ 顺序主子式均大于 $0 \Rightarrow$ 正定.

法二: $X^t(tE+A)X = tX^tX + X^tAX$

$$= tX^tX + \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

$$\ge tX^tX - \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \frac{x_i^2+x_j^2}{2}$$

故 $t > |a_{ii}| + \sum_{j\ne i} \frac{|a_{ij}|}{2}$ 时 $X^t(tE+A)X \ge 0$ 且取等 $\Leftrightarrow X=0$

故 $tE+A$ 正定

法三: (实际为法一补充)

Lemma(对角占优): $A=(a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$ 若 $|a_{ii}| > \sum_{j\ne i} |a_{ij}|$ $(i=1,2,\cdots,n)$

, 则 $\det A \ne 0$. 特别地, 若 $a_{ii} > \sum_{j\ne i} |a_{ij}|$ $(i=1,\cdots,n)$ 则 $\det A > 0$

证明: 假设 $\det A = 0$, 则 $\exists X \in \mathbb{R}^n$, $X \ne 0$ s.t. $AX=0$

设 X 中绝对值最大分量为 x_i $(|x_i|>0)$

则由 $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ 知

$$-a_{ii}x_i = \sum_{j\ne i} a_{ij}x_j$$

从而 $|a_{ii}|\,|x_i| = \left|\sum_{j\ne i} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j\ne i} |a_{ij}||x_j| \le \left(\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\right)|x_i| < |a_{ii}||x_i|$

故矛盾.

$a_{ii} > \sum_{j\ne i} |a_{ij}|$ 时 $\det A \ne 0$, 考虑 $\det(tE+A)$,

$\forall t \ge 0$, $tE+A$ 对角占优 故 $\det(tE+A)$ 无非负实零点.

日期:　　/

而 $\det(tE+A)$ 为关于 t 的首一多项式 $\Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\det(tE+A)=+\infty$

故 $\forall t\geq 0$, $\det(tE+A)>0$ 特别地, $\det(0E+A)>0 \Rightarrow \det A>0$ ▨

故 $t>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|-a_{ii}$ 时 $tE+A$ 正定

Remark: 由此可得 对任意对称阵 A $\left\{\frac{X^tAX}{X^tX}\,\middle|\,X\neq 0\right\}$

有界, 记 $R(x)=\frac{x^tAx}{x^tx}$ 为 A 的 Rayleigh 商.

5、矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$ 顺序主子式为 λ, $-2\lambda+1$, $5\lambda+3$

故负定 $\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda<0\\ -2\lambda+1>0\\ 5\lambda+3<0\end{cases} \Leftrightarrow \lambda<-\frac{3}{5}$

6、法一:

验证二次型略, 假设 $k>s$, 设在一组基下有标准型

$q=f_1^2+\cdots+f_s^2-f_{s+1}^2-\cdots-f_{s+t}^2=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2$

则方程组 $\begin{cases}f_1(x_1,\cdots,x_n)=0\\ \vdots\\ f_s(x_1,\cdots,x_n)=0\\ x_{k+1}=0\\ \vdots\\ x_n=0\end{cases}$ 有非零解 $(y_1,\cdots,y_n)$

此时 $q=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2=x_1^2+\cdots+x_k^2>0$

$q=f_1^2+\cdots+f_s^2-f_{s+1}^2-\cdots-f_{s+t}^2=-f_{s+1}^2-\cdots-f_{s+t}^2\leq 0$

矛盾.

法二：取一组基 s.t. q 为标准型 $x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2$

设 $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \\ f_{s+1} \\ \vdots \\ f_{s+t} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则 $X^t\begin{pmatrix} E_k & \\ & -E_l \end{pmatrix}X=(PX)^t\begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}PX$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_k & \\ & -E_l \end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}P$

记 $P^t=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{pmatrix}$.

则 $\begin{pmatrix} E_k & \\ & -E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}P_{11}^t-P_{12}P_{12}^t & P_{11}P_{21}^t-P_{12}P_{22}^t \\ P_{21}P_{11}^t-P_{22}P_{12}^t & P_{21}P_{21}^t-P_{22}P_{22}^t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_{11}P_{11}^t$ 正定 故 $k\le s$

日期: /

期中复习

1. 线性空间

Def. V为加法交换群，$\mathbb{F}$上成数乘：$\mathbb{F}\times V\to V$

满足 ① $\forall v\in V$, $1\cdot v=v$

② $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $v\in V$, $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$

③ $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $v\in V$, $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

④ $\forall\alpha\in\mathbb{F}$, $u,v\in V$, $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

则称V为$\mathbb{F}$上线性空间.

例：向量空间，$M_n(\mathbb{F})$，$Hom(V)$，$\mathbb{F}[x]^{(d)}$等

2. 子空间：$W\subset V$且$(W,+,\cdot)$为$\mathbb{F}$上线性空间称为子空间

验证子空间只须验证加法，数乘封闭且非空.

3. 直和，$V_1,\dots,V_k$为V的子空间且$V=\sum_{i=1}^{k}V_i$，称$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$

① 0的分解唯一

② V中元素分解

③ $V_i\cap\left(\sum_{j\neq i}V_j\right)=\{0\}$

④ $\dim V=\sum_{i=1}^{k}\dim V_i$

Remark $V=\bigoplus_{i=1}^{k}V_i \nLeftarrow \forall i,j;\ i\neq j\ \ V_i\cap V_j=\{0\}$,

如$\langle(1,0)\rangle\langle(1,1)\rangle\langle(1,2)\rangle$之和不为直和

日期:　　　/

例：$char(\mathbb{F})\neq 2$，$M_n(\mathbb{F})=SM_n(\mathbb{F})\oplus SSM_n(\mathbb{F})$

4、基，基变换(已知一组基，验证另一组基只须求转换矩阵行列式)，

基扩充定理。

5、商空间与商映射（自然映射，即不依赖基的选取，另一

自然映射为 $\varphi: V\to V^{**}$　$\alpha^{**}(f)=f(\alpha)$)

$\alpha\mapsto\alpha^{**}$

6、线性映射与矩阵的同构.

用线性映射证明矩阵秩不等式

例：Frobenius 秩不等式

$A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 可交换，$C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，$r(A)+r(B)\geq r(C)+r(AB)$

7、线性函数

$V\simeq V^{**}$，

$\forall f\in V^*\setminus\{0\}$，设 $\dim V=n$，则 $\dim\ker f=n-1$（实际上 $\dim V/\ker f=1$）

$f,g\in V^*$ 则 $\langle f\rangle=\langle g\rangle\Leftrightarrow \ker f=\ker g$

8、双线性型

任一 V 上双线性型 f，$\dim V=n$，给定一组基 $e_1,\cdots,e_n$，

则 $f(X,Y)=X^tGY$　　$G=(f(e_i,e_j))_{n\times n}$

日期: /

双线性型在不同基下矩阵合同.

9、对称双线性型，二次型 ($\mathrm{char}\,\mathbb{F}\neq 2$)

配极: $f(x,y)=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$

二次型在一组基下有规范型 $\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$

即 $\forall A\in SM_n(\mathbb{F})$, $\exists P\in GL_n(\mathbb{F})$ s.t. P^tAP 为对角阵

方法: 1、降维法

2、行列变换法

3、配方法

10、签名, 这里基域为 $\mathbb{R}$.

(半)正定, (半)负定

正定 $\Leftrightarrow$ 顺序主子式均为正 $\Leftrightarrow$ 主子式均为正 $\Leftrightarrow$ $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $X^tAX\geq 0$

且 $X^tAX=0$ 仅有0解 $\Leftrightarrow$ $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^tP$ $\Leftrightarrow$ $k=n$, $l=0$

半正定 $\Leftrightarrow$ 主子式均非负 $\Leftrightarrow$ $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $X^tAX\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\exists P\in\mathbb{R}^{n\times t}$ s.t. $A=P^tP$ $\Leftrightarrow$ $k=\mathrm{rank}(A)$ $\Leftrightarrow$ $l=0$

A 半正定 则 $X^tAX=0\Leftrightarrow AX=0$

U 为 V 的子空间, $q|_{U\times U}$ 正定, 则 $k\geq\dim U$