1. 上周作业

1.1 $q = x_1x_2 + x_2x_3$ 为 $\mathbb{R}$ 上二次型，计算 q 的签名

解. • 配方法

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$q = (y_1+y_2)(y_1-y_2) + (y_1-y_2)y_3$$
$$= y_1^2 + y_1y_3 - y_2^2 - y_2y_3$$
$$= \left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(y_2 + \frac{y_3}{2}\right)^2$$
$$= z_1^2 - z_2^2$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} \\ z_2 = y_2 + \frac{y_3}{2} \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

• 打洞

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & \frac12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac12(1)+(2),\ -\frac12(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac14 & \frac14 \\ 0 & \frac14 & -\frac14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 签名为 $(1,1)$

1.2 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

存在 $P \in GL_2(\mathbb{R})$ $(GL_2(\mathbb{C}))$ s.t. $S = P^tP$

$\Leftrightarrow$ 存在 $P \in GL_2(\mathbb{R})$ $(GL_2(\mathbb{C}))$ s.t. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^tP$

in $\mathbb{R}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 不定 $\Rightarrow$ 这样的 P 不存在

in $\mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

1.3 $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_ib_i \\ \sum_{i=1}^n a_ib_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix} \geq 0$

看作二次型为 $(\sum a_i^2)x^2 + (\sum b_i^2)y^2 + 2\sum a_ib_i xy$

$$= \sum (a_ix + b_iy)^2 \geq 0$$

$\det\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum a_ib_i \\ \sum a_ib_i & \sum b_i^2 \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \geq 0$ （Cauchy 不等式）

1.4 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ 证明 $\exists t > 0$ s.t. $tE + A$ 正定

时 考虑 顺序主子式 Δ_i 发现它是首一、度为 i 的多项式

1. 设 $\dim V = n$, $f_1, \cdots, f_{s+t} \in V^*$. 证明

$$q = f_1^2 + \cdots + f_s^2 - f_{s+1}^2 - \cdots - f_{s+t}^2$$

为二次型 且正惯性指数 $k \leq s$.

pf. 由 q 的正惯性指数为 k ⇒ 存在 V 的 k 维子空间 V_1 s.t. $q(x) > 0$ $\forall x \in V_1 \setminus \{0\}$

令 $V_2 = \ker f_1 \cap \ker f_2 \cap \cdots \cap \ker f_s$

$\dim V_2 = n - \operatorname{rank}(f_1, \cdots, f_s) \geq n - s$

注意到 $q(x) \leq 0$ $\forall x \in V_2$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\} \Rightarrow n \geq \dim V_1 + \dim V_2 \geq k + n - s$

$\Rightarrow s \geq k$

~~法二. q 表示矩阵~~

~~$f_1^2+\cdots+f_s^2$ 表示 对称矩阵 A. $A \geq 0$ (半正定) $\operatorname{rank} A \leq s$~~

~~$f_{s+1}^2+\cdots+f_{s+t}^2$ 表示对称矩阵 B $B \geq 0$~~

~~$q = A - B$~~

2. 期中复习

- 线性空间
  - 定义: 加法, 数乘 (8条)
  - 子空间
    - 和, 直和
    - 商空间
  - 线性相关, 线性无关 — 基, 维数 —坐标变换→
    - 维数
  - 线性映射
    - 同构定理 — 一些维数公式
    - 对偶空间 — $V \cong V^{**}$ 自然同构

$V \xrightarrow[\cong]{\text{取基 } e} F^{1\times n}$ $\quad \times A$

取基 $e' = Ae$ $\quad F^{1\times n}$ $\quad x$

对称双线性型$/\sim$ $\xleftrightarrow{1:1}$ 二次型$/\sim$ $\xleftrightarrow{1:1}$ $SM_n(F)/\sim$ 合同

$f \rightleftarrows q \xrightarrow{\text{取基}} [A] = [D]$ D为对角阵

char≠2, 有个很好的代表元

No.
Date

实二次型：$F=\mathbb{R}$ $D \sim_c \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

合同不变量：正惯性指数 k，负惯性指数 l，秩 $r=k+l$

标准型的计算 < 配方 / 行列相伴变换（打洞）

正定，半正定 —— 判别，Jacobi 公式

5. 练习

A 正定，说明 $\det\begin{pmatrix} A & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix}$ 是二次型，且负定，其中 $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

pf: · $A = I_n$

法一 $\det\begin{pmatrix} I_n & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix} = -x_1^2 - \cdots - x_n^2$ 负定

· A 一般情形 $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^TAP = I_n$

则 $\begin{pmatrix} P^T & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} P^TAP & P^Tx \\ x^tP & 0 \end{pmatrix} \underset{令 y=P^Tx}{=} \begin{pmatrix} I_n & y \\ y^t & 0 \end{pmatrix}$ 负定

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix}$ 负定

法二：$\begin{pmatrix} A & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-x^tA^{-1}(1)+(2)} \begin{pmatrix} A & x \\ 0 & -x^tA^{-1}x \end{pmatrix} \xrightarrow[-(1)A^{-1}x+(2)]{} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -x^tA^{-1}x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 注意到 $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -x^tA^{-1}x \end{pmatrix} = -\det A\, x^tA^{-1}x$ 是负定二次型

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} A & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix}$ 负定